Uitwerkingen hoofdstuk 16 deel vwo A 1,2 deel 4

Differentievergelijkingen

1. $u_n = 2u_{n-1} + 3$ met $u_0 = 4$ $u_2 = 25 \Rightarrow$
$u_3 = 2.25 + 3 = 53$; $u_4 = 2.53 + 3 = 109$ en $u_5 = 2.109 + 3 = 221$

2. MR met $u_2 = 1280$ en $u_7 = 3906{,}25$

a. Stel $u_n = u_0 \,.\, r^n$ $r^5 = \dfrac{u_7}{u_2} = \dfrac{3906{,}25}{1280} = 3{,}05... \Rightarrow r = (3{,}05...)^{\frac{1}{5}} = 1{,}25 \Rightarrow u_n = u_0.1{,}25^n$
$u_2 = 1280 = u_0 \,.1{,}25^2 \Rightarrow u_0 = 1280 \,.\, 1{,}25^{-2} = 819{,}2 \Rightarrow u_n = 819{,}2 \,.\, 1{,}25^n$

b. $u_n = u_{n-1} \,.\, 1{,}25$ met $u_0 = 819{,}2$

c. $u_n > 100000$ eerst $819{,}2 \,.\, 1{,}25^n = 100000 \Leftrightarrow$
$1{,}25^n = \dfrac{100000}{819{,}2} = 122{,}07... \Leftrightarrow n = {}^{1{,}25}\log 122{,}07... = \dfrac{\log(122{,}07..)}{\log(1{,}25)} \approx 21{,}5 \Rightarrow$
vanaf $n = 22$ geldt dat $u_n > 100000$

3. $u_n = 0{,}8 \,.\, u_{n-1}$ met $u_3 = 3276{,}8$

a. We zien aan de recursieve betrekking dat het hier gaat om een MR. $\Rightarrow r = 0{,}8$ en
$u_0 = \dfrac{u_3}{r^3} = \dfrac{3276{,}8}{0{,}8^3} = 6400 \Rightarrow u_n = 6400 \,.\, 0{,}8^n$

b. $u_{10} = 6400 \,.\, 0{,}8^{10} \approx 687{,}2$

c. $u_n < 200$ Eerst :
$6400.0{,}8^n = 200 \Leftrightarrow 0{,}8^n = \dfrac{200}{6400} = 0{,}03125 \Leftrightarrow n = {}^{0{,}8}\log(0{,}03125) = \dfrac{\log(0{,}03125)}{\log(0{,}8)} \approx 15{,}5 \Rightarrow$
vanaf n = 16 klopt het $\Rightarrow$ vanaf de **17^e^** term.

4. RR met $u_{12} = 26$ en $u_{20} = 38$

a. Stel $u_n = u_0 + vn$ Tussen u_{20} en u_{12} zit 8 keer het verschil v $\Rightarrow 8v = 12 \Rightarrow v = 1{,}5$
Verder geldt: $u_{12} = u_0 + 1{,}5.\ 12 \Rightarrow 26 = u_0 + 18 \Leftrightarrow u_0 = 8 \Rightarrow u_n = 8 + 1{,}5 \,.\, n$

b. Bij een RR komt er steeds eenzelfde getal bij of gaat er steeds eenzelfde getal vanaf. $\Rightarrow$
$u_n = u_{n-1} + 1{,}5$ met $u_0 = 8$

c. $u_n = 218 \Leftrightarrow 8 + 1{,}5 \,.\, n = 218 \Leftrightarrow 1{,}5n = 210 \Leftrightarrow n = 140 \Rightarrow$ de 141^e^ term is 218.

5. In 1997 10000 zeehonden ; 40% toename en 15% afname elk jaar.

a. De toename per jaar is 40% - 15% = 25% $\Rightarrow$ de groeifactor is: 1,25 $\Rightarrow$
$P_n = 1{,}25 \cdot P_{n-1}$ met $P_0 = 10000$

b. Zet de modetoets op seq en voer in: $u_n = u_{n-1} \cdot 1{,}25$ en $u_0 = 10000$ en $n = 0$
We weten dat u_0 is in 1997 ; u_1 in 1998 enz.
Met de tabel zien we dat $u_6 = 38147$ en $u_7 = 47684$ $\Rightarrow$ de toename in 2003 is dus 47684 – 38147 = 9537.
$u_8 = 59605$ en dat $u_9 = 74506$ $\Rightarrow$ de toename in 2005 is dus 74506 – 59605 = 14901

c. Zie dezelfde tabel $u_7 = 47684$ $\Rightarrow$ in januari van 2004 geldt het gevraagde.

6. 5000 euro; rente van 3,8% per jaar; vanaf 19^e jaar 150 euro opname.

a. rente per jaar 3,8% $\Rightarrow$ gr. factor is 1,038 Vervolgens elk jaar een afname van 150 euro.

b. Op die manier komen we tot 5169,35 euro (goed tellen !!!)

c. De eerste en de 3^e formule voldoen hier.

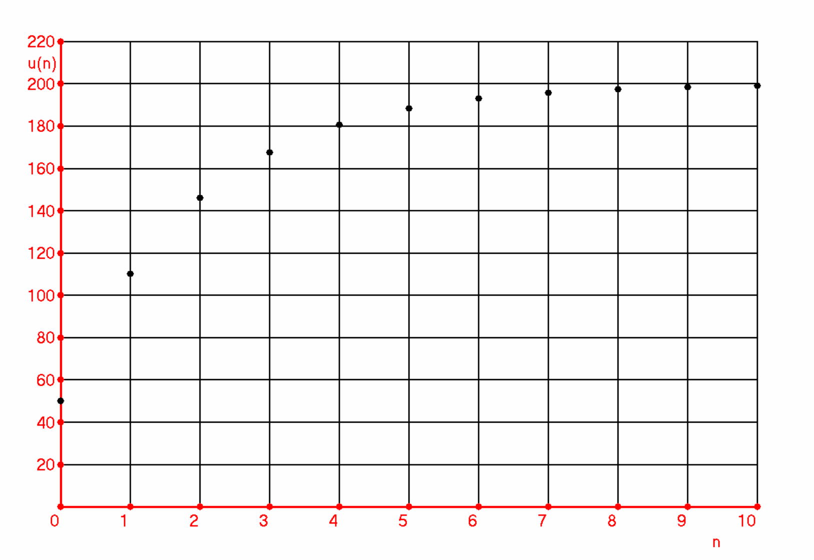
7. $u_n = 0{,}6u_{n-1} + 80$ met $u_0 = 50$

a. Formule invoeren in GR met $n = 0$ en $u_n(\text{min}) = 50$ $\Rightarrow$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
u_n	50	110	146	167,6	180,6	188,3	193,0	195,8	197,5	198,5	199,1

b. Deze waarden gaan naar het getal 200 $\Rightarrow$ verzadigingsniveau is dus 200.

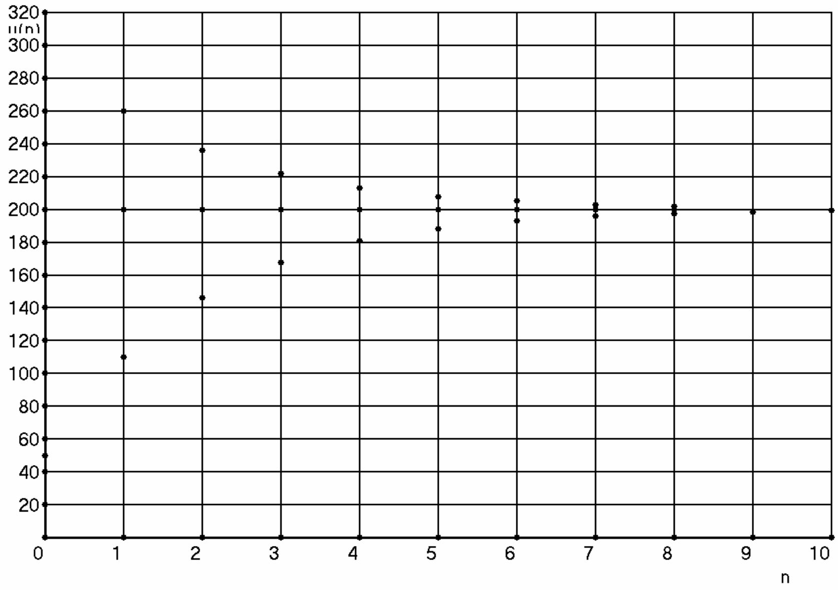
c.



d. Zie figuur

e. Zie figuur
De punten hebben allemaal de hoogte 200

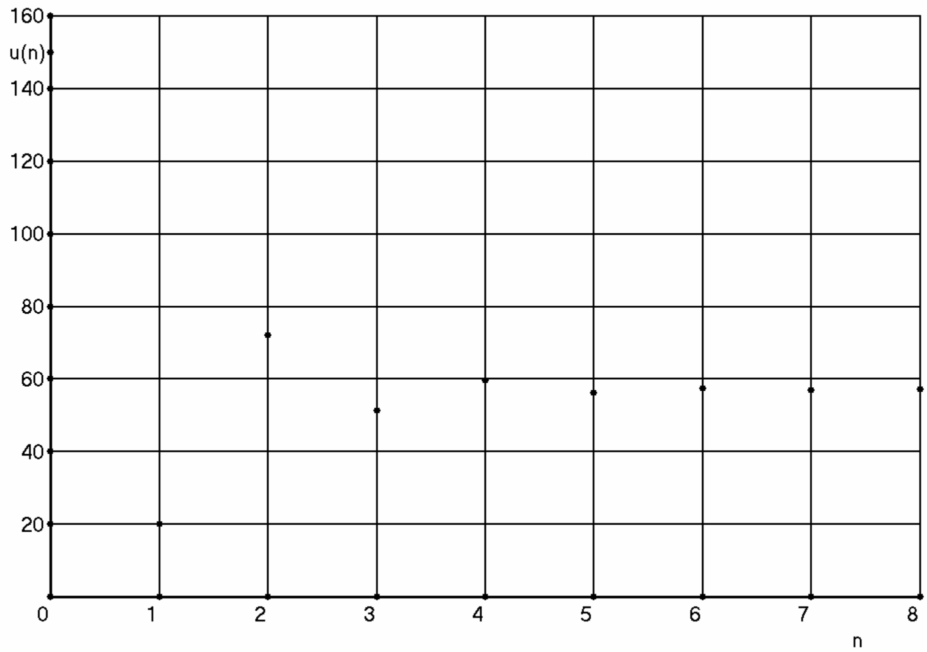
f. 0,6 . 200 + 80 = 200
⇒ constante rij op hoogte 200



8. $u_n = -0{,}4u_{n-1} + 80$ met $u_0 = 150$

a. Invoeren in GR met $n = 0$ en $u_n(\text{min}) = 150$ ⇒ tabel

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	150	20	72	51,2	59,5	56,2	57,5	57,0	57,2



b. Er is wel verzadiging , maar de punten komen wisselend van boven en van onderen naar het verzadigingsniveau.

9. $u_n = 1{,}2.u_{n-1} + 80$ met $u_0 = 150$ Invoeren in GR met n(min) = 0 en $u(n$Min) = 150

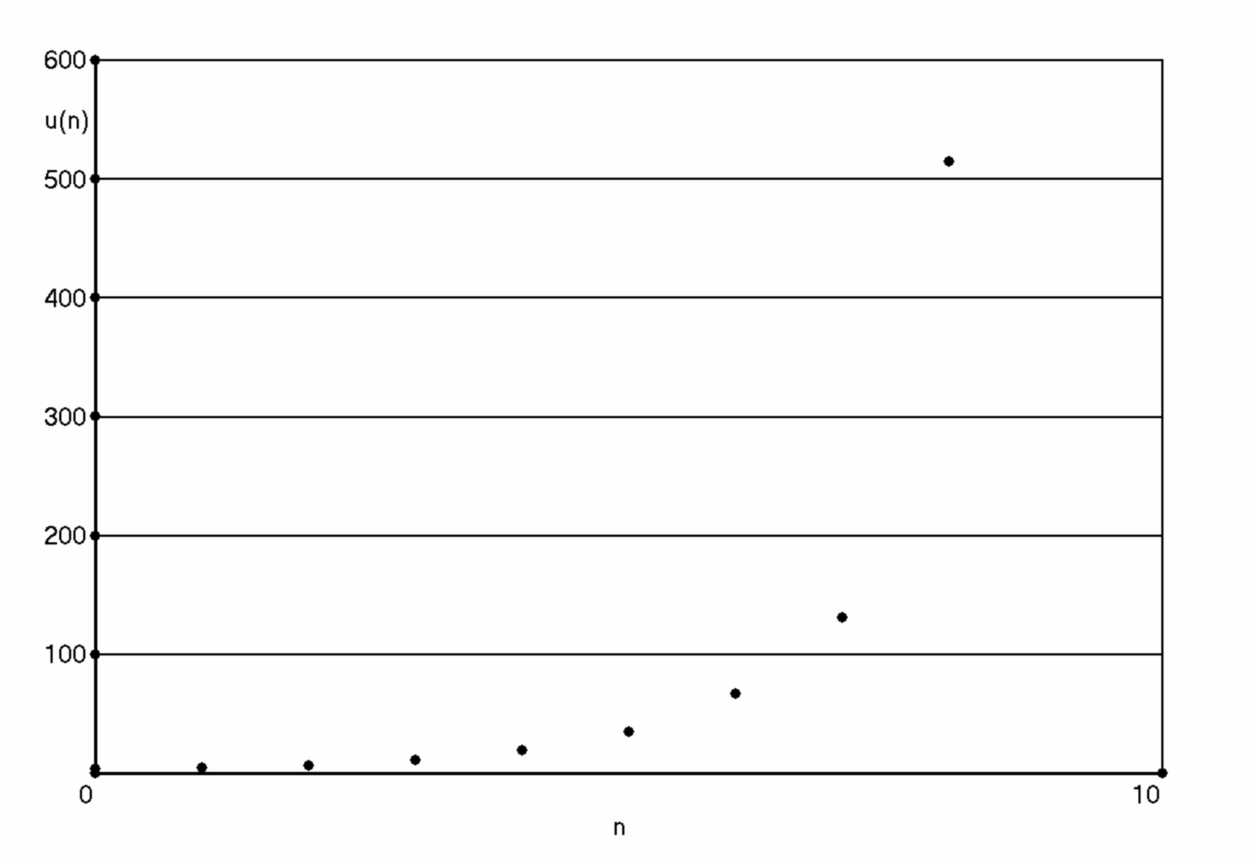
tabel geeft:

n	0	1	2	3	4	5	6
u_n	15	260	392	550,4	740,5	968,6	1242,3

*U*i t de tabel blijkt dat de waarden steeds meer *u*it elkaar gaan . Er is d*u*s geen verzadiging.

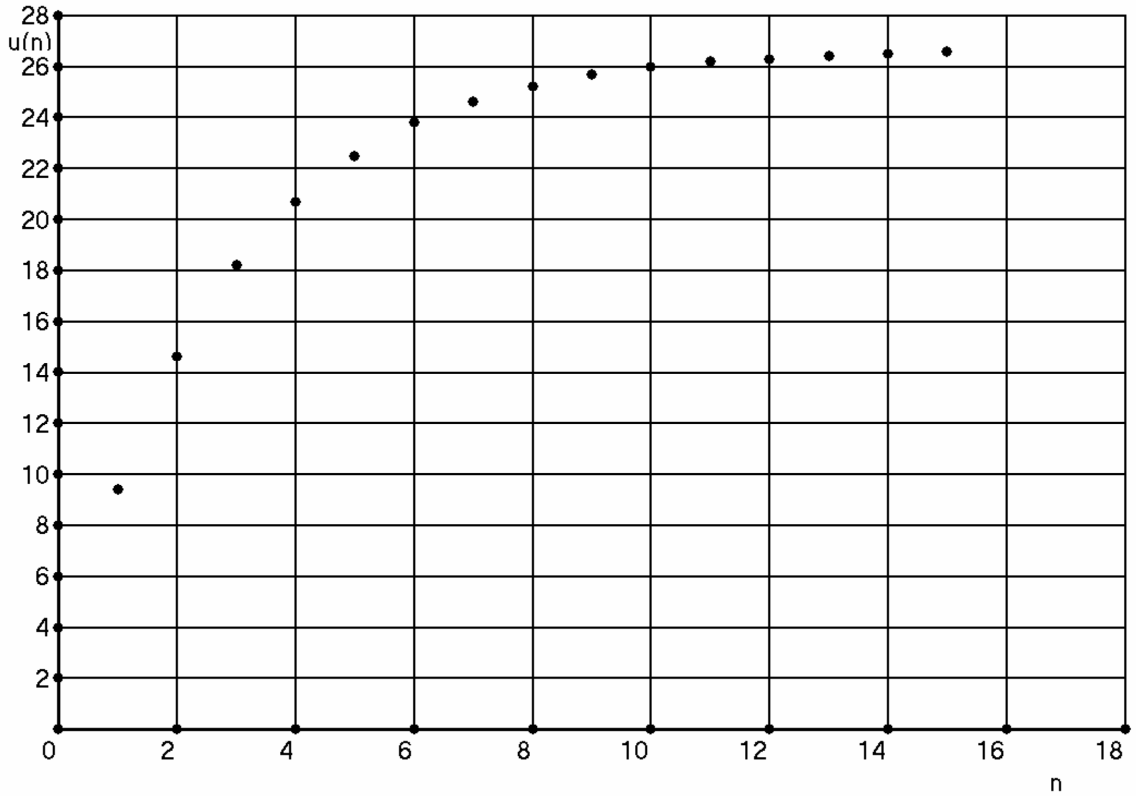
10. a. lineair en 1^e orde met $a = 3$ en $b = -8$
b. niet lineair , er is nog de term u_{n-2}
c. lineair en van de 1^e orde met $a = 0{,}3$ en $b = 0$
d. niet lineair, de term u_{n-1}^2 kom je hier tegen.
e. lineair en van de 1^e orde met $a = 1$ en $b = 100$
f. lineair en van de 1^e orde met $a = 1/1{,}25$ en $b = -8$

11. $u_n = 2u_{n-1} - 3$ met $u_0 = 4$



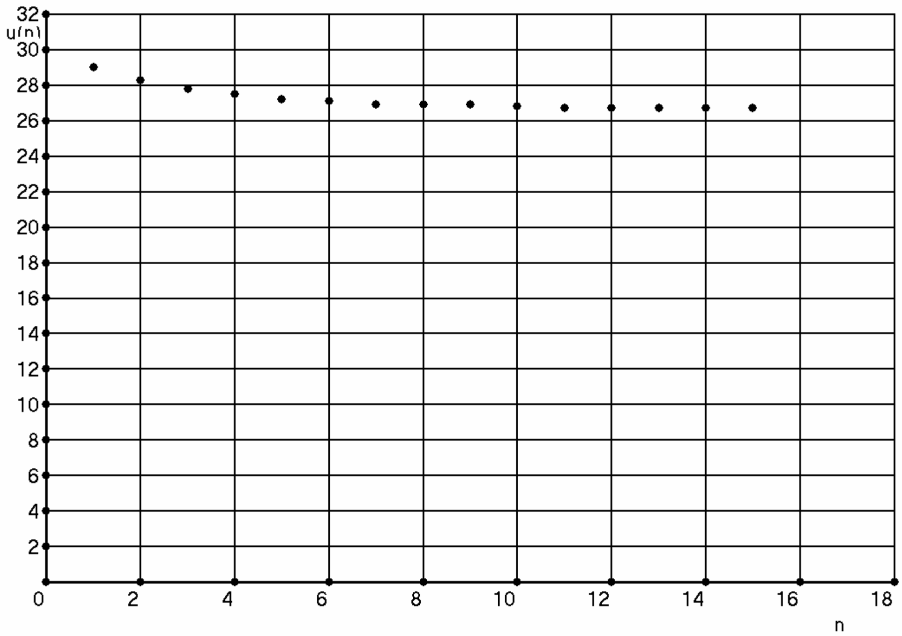
Er treedt geen verzadiging op.

12. $u_n = 0{,}7u_{n-1} + 8$ met $u_0 = 2$



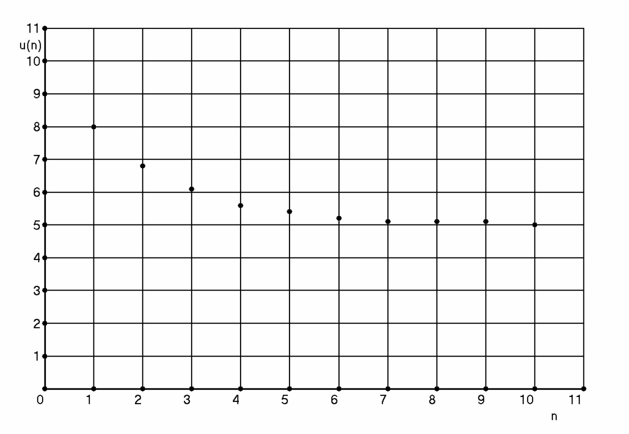
Er is hier verzadiging naar ongeveer 26,7

b. N*u* de startwaarde bijv. 30
de time-grafiek wordt nu:

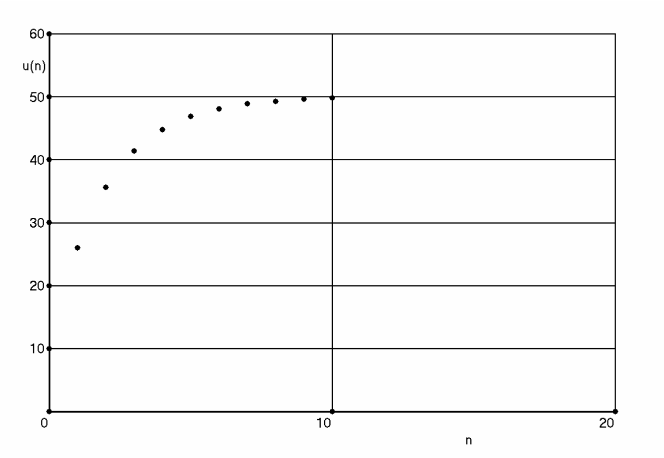


13a. $u_n = 0{,}6.u_{n-1} + b$ met $u_0 = 10$

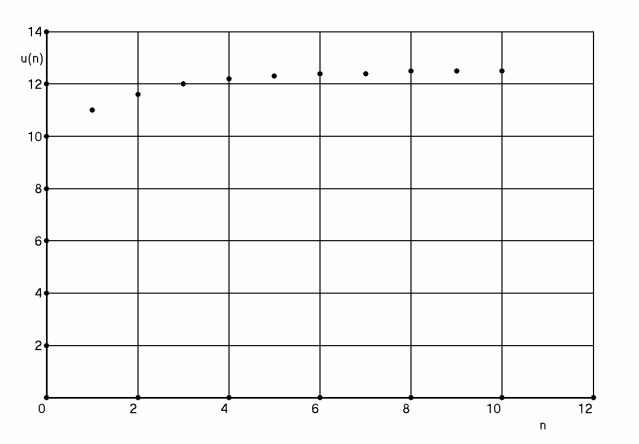
met $b = 2$; $b = 20$ en $b = 5$



$b = 2$



$b = 20$



$b = 5$

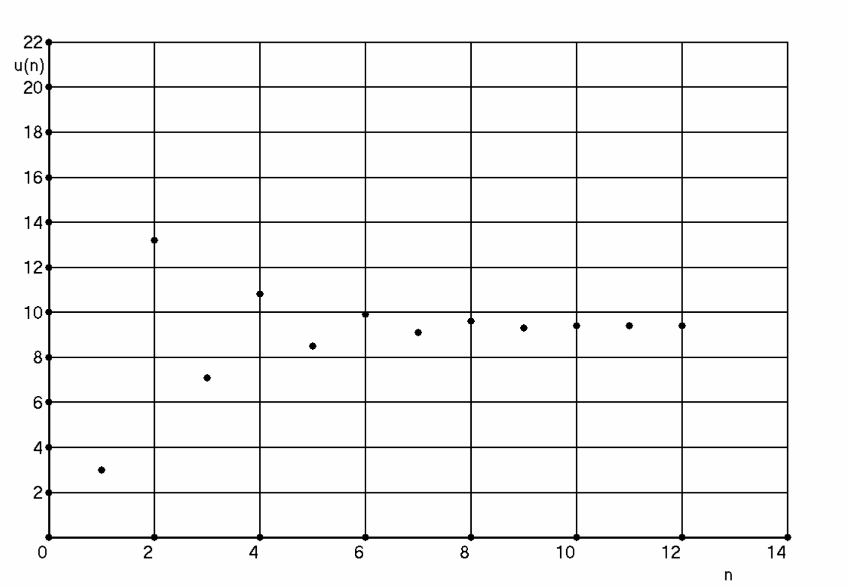
Bij $b = 2$ is het verzadigingsniveau 5
Bij $b = 20$ is het verzadigingsniveau 50
Bij $b = 5$ is het verzadigingsniveau 12,5

b. Bij $b = 2$ hoort een dalende grafiek en bij de andere waarden van b hoort een stijgende grafiek.

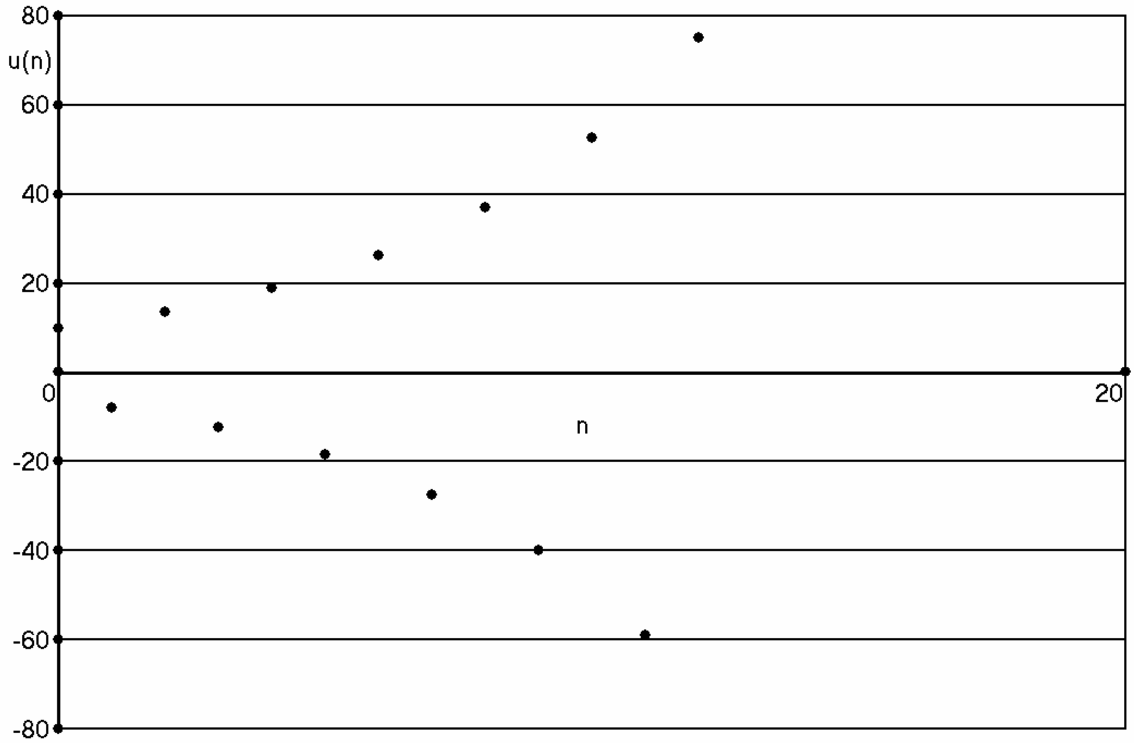
14. $u_n = -0{,}6u_{n-1} + 15$ met $u_0 = 20$

a. Er is vezadiging met niveau 9,4

b. De benadering is wisselend van boven en van onderen.



15. $u_n = -1{,}2u_{n-1} + 4$ met $u_0 = 10$



Er is geen verzadiging

b. De punten gaan steeds verder uit elkaar afwisselend naar boven en naar onderen.

16.

a. Afbraak 12% $\Rightarrow$ groeifactor is 0,88. Steeds 25 mg erbij met een begin van 100 mg $\Rightarrow$
$u_n = 0{,}88 \, . \, u_{n-1} + 25$ met $u_0 = 100$

b. Invoeren in GR met n(Min) = 0 en u(nMin) = 100 $\Rightarrow u_6 \approx 158$ mg
Dit is de hoeveelheid medicijn in het lichaam 36 uur na het begin. Dus op 2 mei om 20.00 uur.

c. Kijken naar de tabel $\Rightarrow u_9 \approx 174{,}05$ en $u_{10} \approx 178{,}16$ $\Rightarrow$ vanaf $n = 10 \Rightarrow$ 60 uur na 1 mei om 8.00 uur $\Rightarrow$ op 3 mei om 20.00 uur.

d. Kijken naar de tabel op je GR $\Rightarrow$ verzadigingsniveau is ongeveer 208

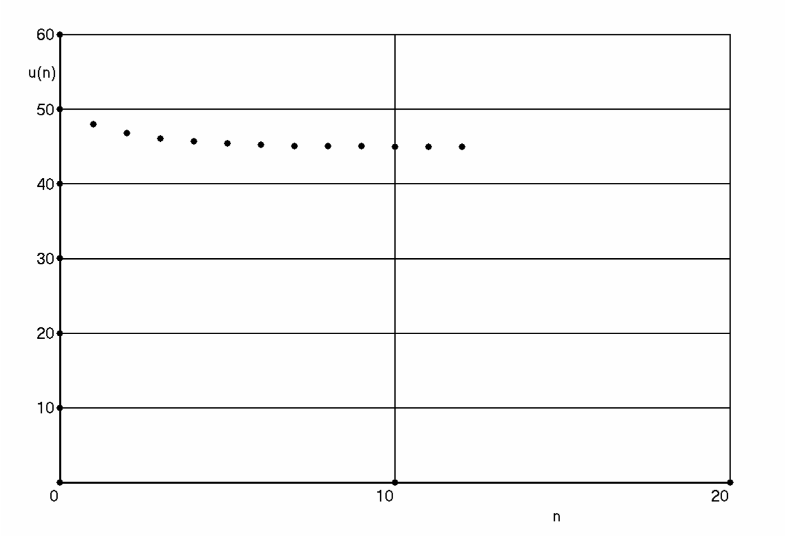
e. Bij verzadiging geldt ongeveer $u_n \approx u_{n-1} = V \Rightarrow V = 0{,}88.V + 25 \Leftrightarrow 0{,}12V = 25 \Rightarrow V \approx 208$

17. $u_n = 0{,}6.u_{n-1} + 18$ met $u_0 = 50$

n	0	2	4	6	8	10	12
u_n	50	46,8	45,6	45,2	45,1	45,0	45,0

a.

Ook grafisch zie je dat het verzadigingsniveau ongeveer 45 is.



b. Voor verzadiging geldt :

$u_n = u_{n-1} = V \Rightarrow$

$V = 0{,}6V + 18 \Leftrightarrow$

$0{,}4V = 18 \Leftrightarrow$

$V = 45$

18.

a. Bij verzadiging is de toename even groot als de afname $\Rightarrow$ hoeveelheid van 40% is dus gelijk aan de hoeveelheid 18. $\Rightarrow$ de vergelijking wordt dus : $0{,}40V = 18$

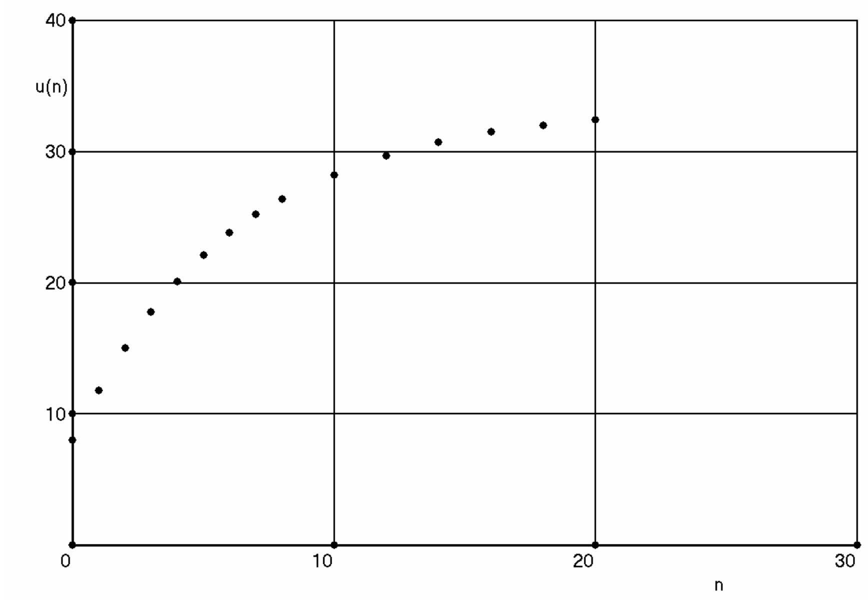
b. $0{,}40.V = 18 \Leftrightarrow V = 45$

19.

a. 15% gaat weg $\Rightarrow$ groeifactor is 0,85 ; 5kg komt erbij $\Rightarrow u_n = 0{,}85u_{n-1} + 5$ met $u_0 = 8$

b. Na 10 *uu*r $\Rightarrow u_{10} = 28{,}35$ met GR Voer in: u_n en n(Min) = 0 en u(nMin) = 8
Met de tabel vinden we dus ongeveer 28,35 kg

c. In de grafiek zie je dat er verzadiging is. De waarde vinden door voldoende hoge waarden van n te nemen $\Rightarrow$
$V \approx 33{,}3$



d. $u_n = u_{n-1} = V \Rightarrow$

$V = 0{,}85V + 5 \Leftrightarrow$

$0{,}15V = 5 \Leftrightarrow$

$V \approx 33\frac{1}{3}$

20a. $u_n = 1{,}5u_{n-1} + 1$ met $u_0 = 2$

$u_0 = 2 \Rightarrow u_1 = 1{,}5 \,.\, 2 + 1 = 4$; $u_2 = 1{,}5.4 + 1 = 7$;

b. $u_3 = 1{,}5 \,.\, 7 + 1 = 11{,}5$

c.

$u_0 = 2$	$u_1 = 4$	$u_2 = 7$	$u_3 = 11{,}5$	$u_4 = 18{,}25$
$u_1 = 4$	$u_2 = 7$	$u_3 = 11{,}5$	$u_4 = 18{,}25$	$u_5 = 28{,}375$

d. (7 ; 11,5) en (11,5 ; 18,25)

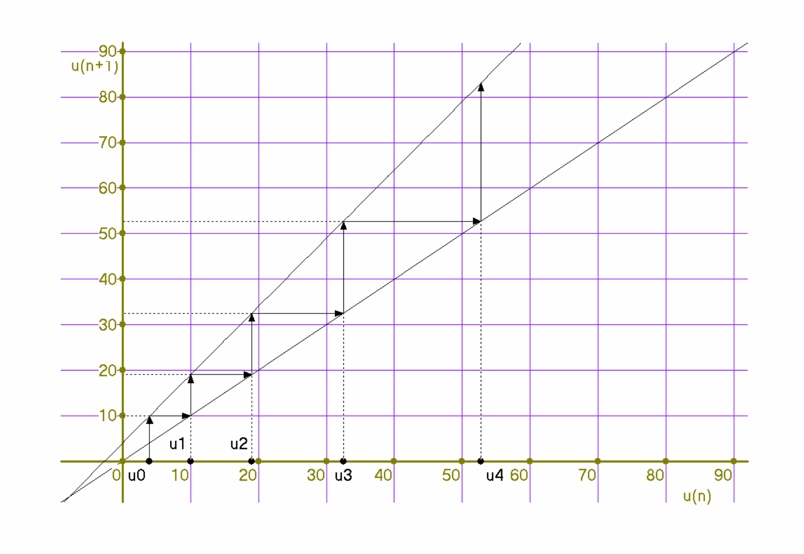
e. Stel $y = ax + b$ r.c. = $a = \dfrac{7-4}{4-2} = 1{,}5 \Rightarrow y = 1{,}5x + b$ door (2 , 4) $\Rightarrow 4 = 3 + b \Rightarrow b = 1 \Rightarrow$
De vergelijking is nu : $y = 1{,}5x + 1$

f. Bij de gegeven differentievergelijking hebben we dezelfde vorm dus met $a = 1{,}5$ en $b = 1$

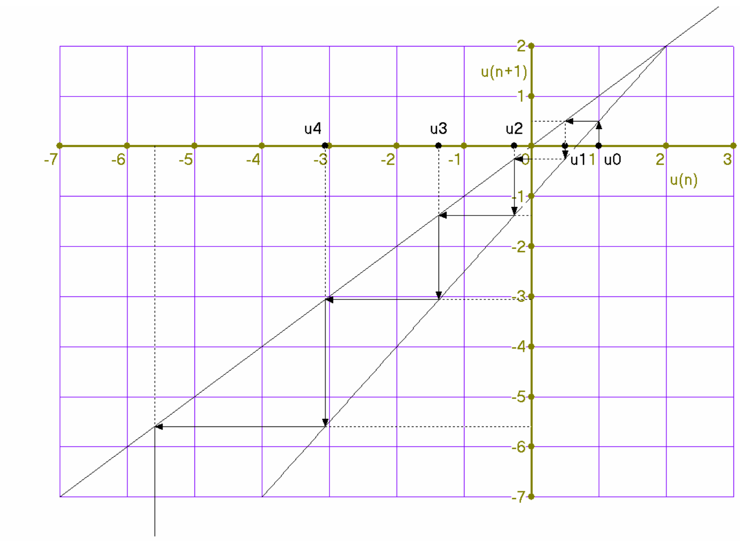
g. Ja , de vegelijking blijft immers hetzelfde.

21. $u_n = 1{,}5u_{n-1} - 1$

a. $u_0 = 4$



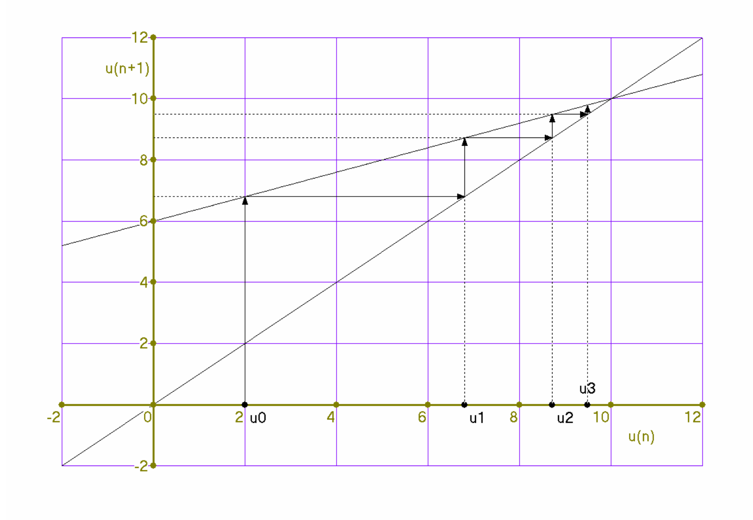
b.



c. Als $u_0 = 2$ Dan bestaat de webgrafiek alleen uit het punt (2,2)
De rij u_n is dan de constante rij $u_n = 2$

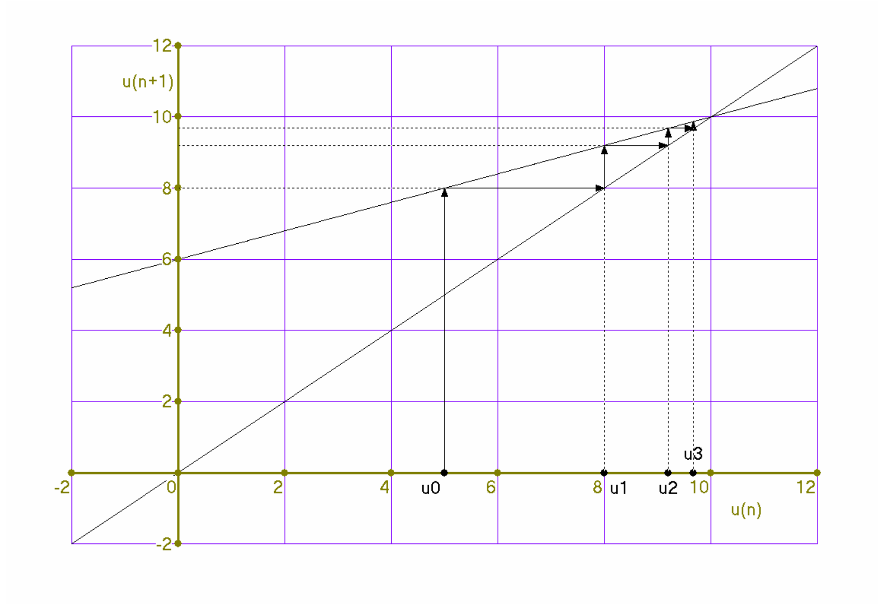
22. $u_n = 0{,}4u_{n-1} + 6$

a. $u_0 = 2$



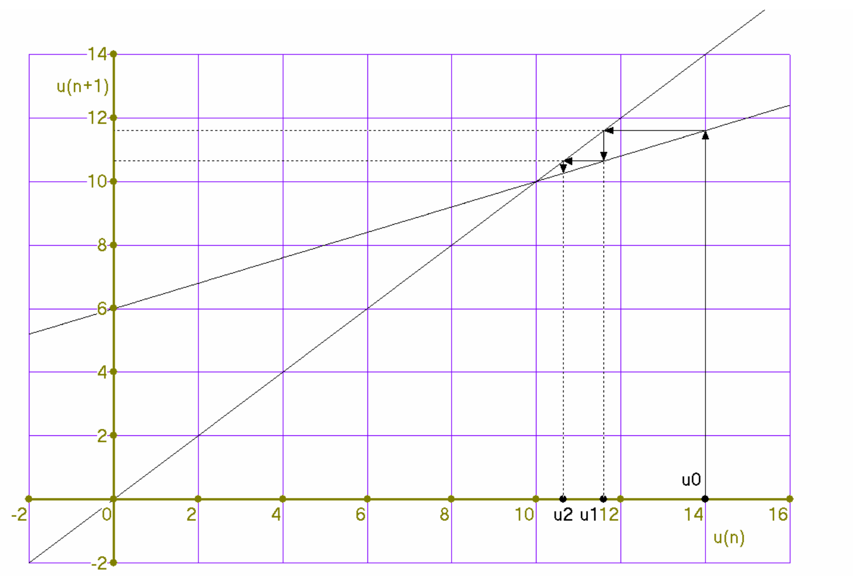
b. De punten komen steeds dichter bij elkaar en benaderen het verzadigingsniveau 10.

c.



Ook hier gaan de punten naar (10,10) en is er verzadiging met verzadigingsniveau is 10

d.



Ook nu treedt er verzadiging op. De punten gaan weer naar (10,10) ze komen echter van de andere kant.

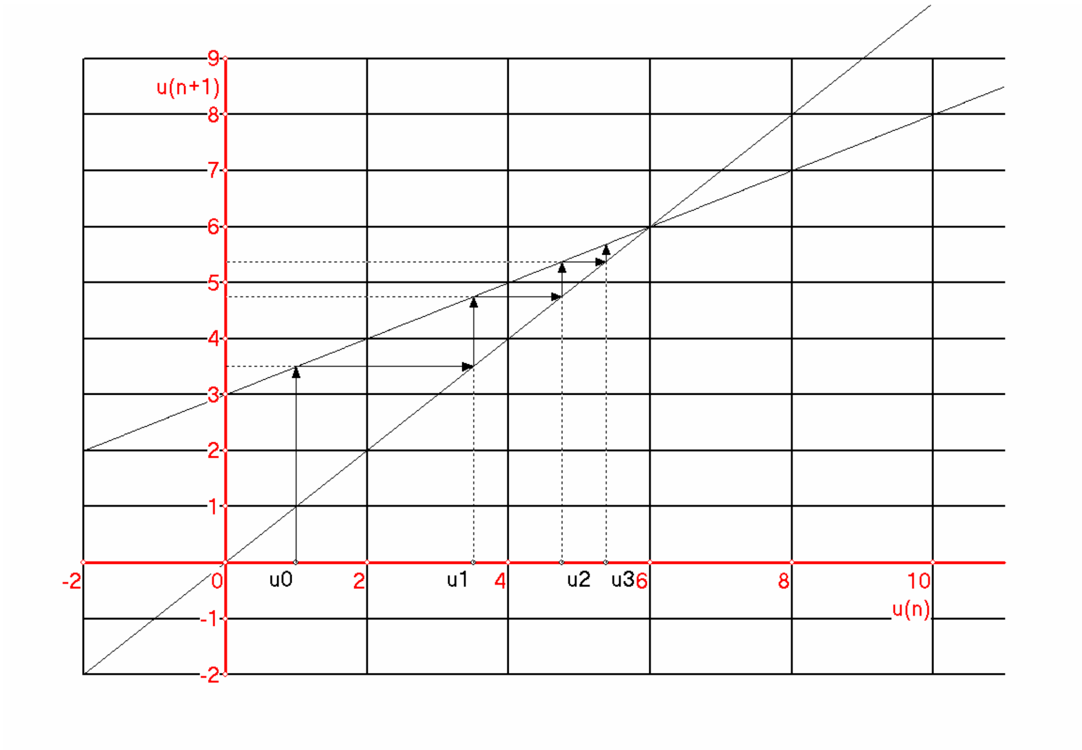
verzadigingsniveau is 10

e. De punten komen steeds dichter bij (10,10) te liggen en dat is steeds onafhankelijk van u_0 .

23.

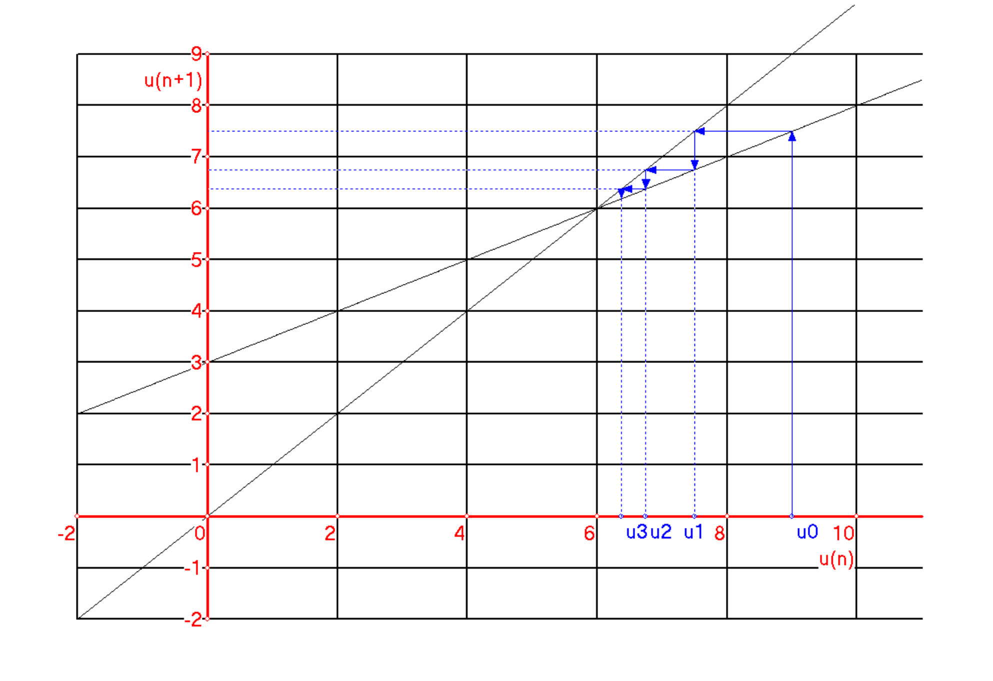
a. De vergelijking is $y = 0{,}5x + 3$ $\Rightarrow$ de diff, verg. is : $u_n = 0{,}5.u_{n-1} + 3$

b.



c. Het verzadigingsniveau u is 6.

d.



e. Het verzadigingsniveau u is weer 6.

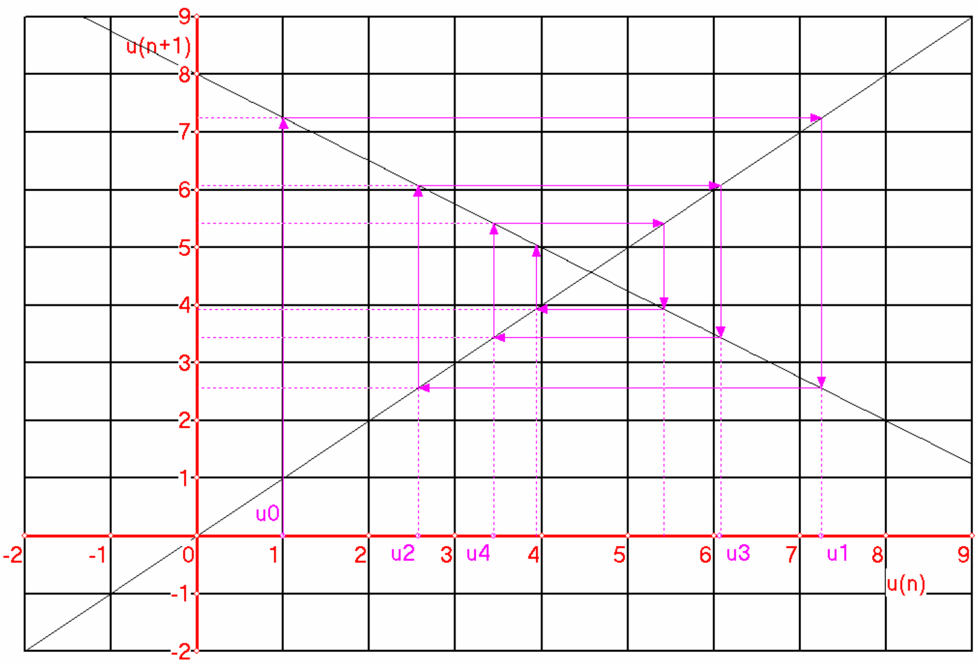
f. Dan moeten we de vergelijking : $V = 0{,}5V + 3$ oplossen.

24.

a. De diff. verg. is : $u_n = -0{,}75u_{n-1} + 8$ met $u_0 = 1$

b.

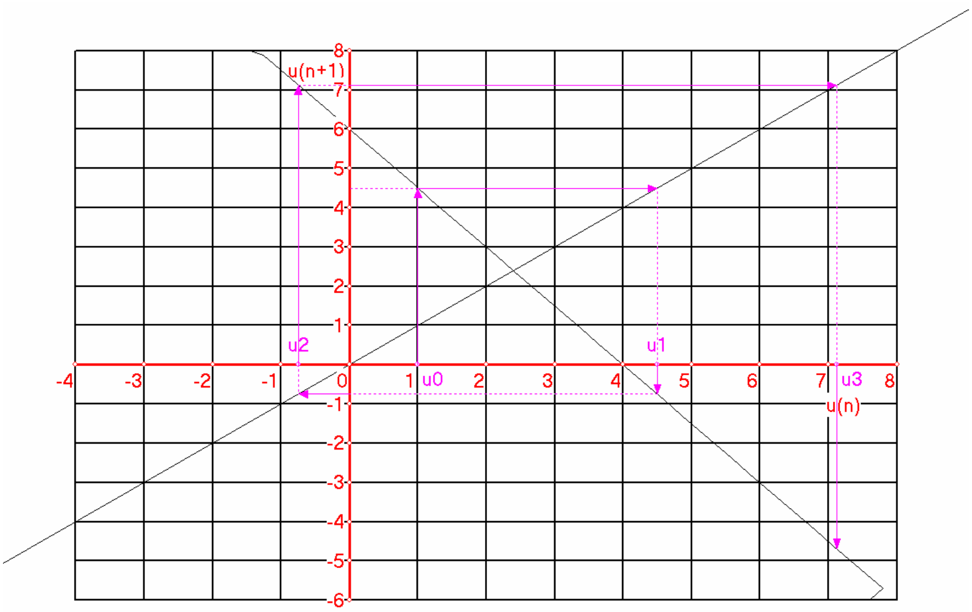
c. Er is verzadiging. De punten komen steeds dichter naar het snijpunt van de lijnen $y = x$ en $y = -0{,}75x + 8$.



d. We moeten dan oplossen: $x = -0{,}75x + 8 \Leftrightarrow$
$1{,}75x = 8 \Leftrightarrow x = 8/1{,}75 \approx 4{,}57 \Rightarrow$ het verzadigingsniveau is dus ongeveer 4,57.

25a. diff. verg. $u_n = -1{,}5u_{n-1} + 6$ met $u_0 = 1$

b.



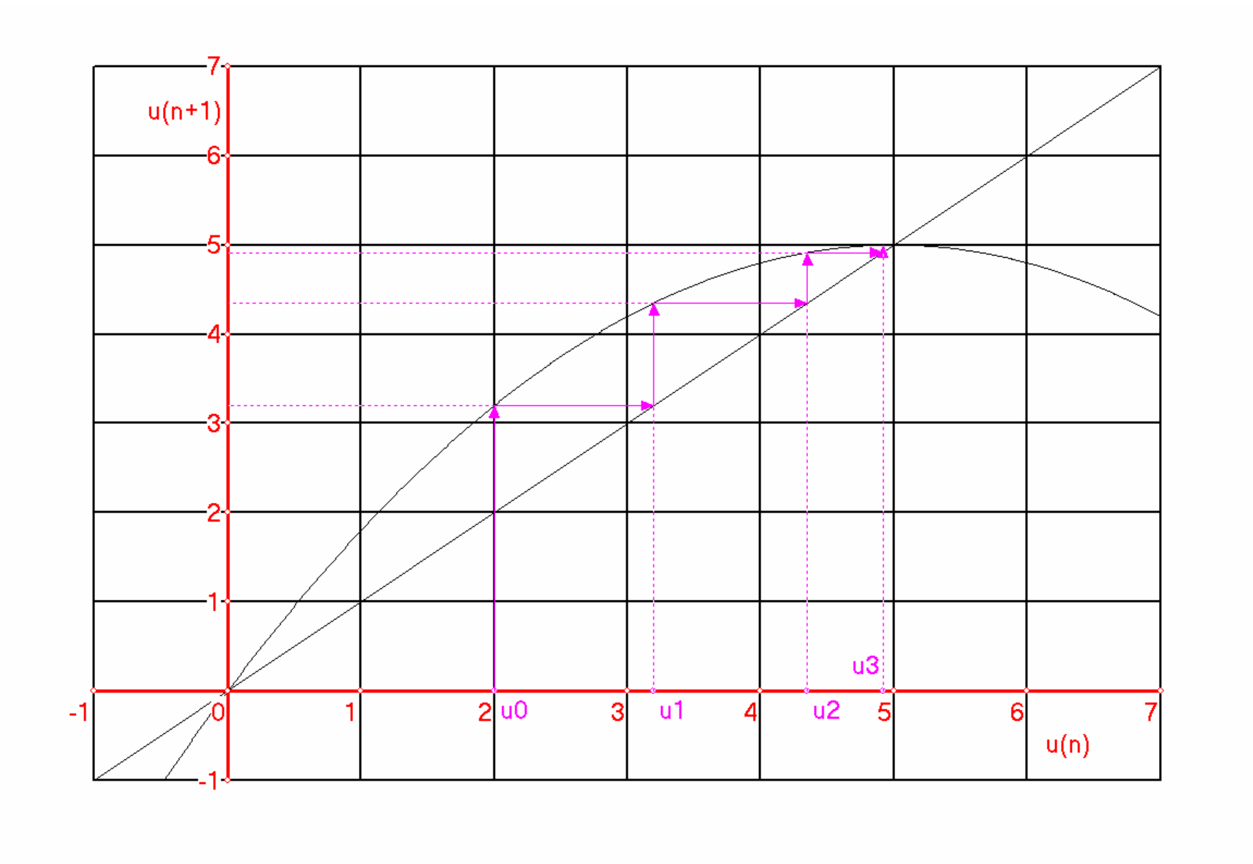
c. Er is geen verzadiging ,want de punten gaan steeds meer uit elkaar.

d. Als $u_0 = 2{,}4$ dan is de webgrafiek slecht het punt (2,4;2,4) zelf namelijk het snijpunt van $y = x$ en $y = -1{,}5x + 6$

26 $u_n = 2u_{n-1} - 0{,}2u^2_{n-1}$

a. De formule van de parabool is : $y = 2x - 0{,}2x^2$

b.

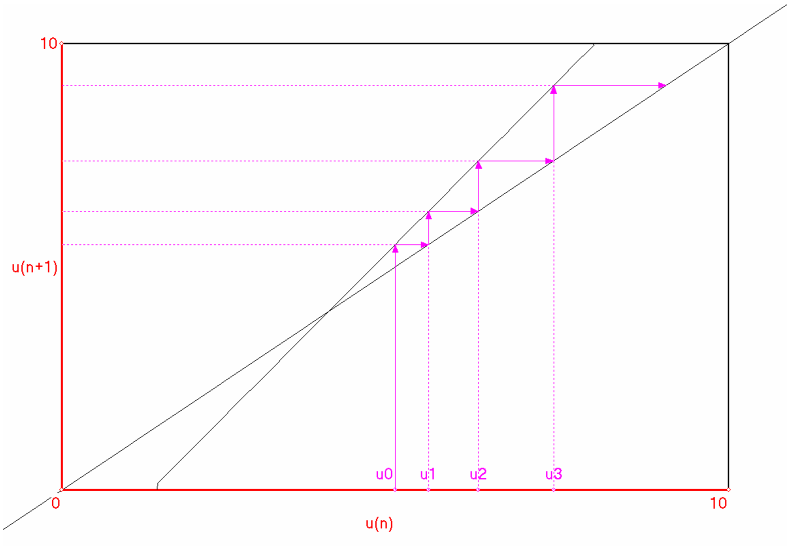


c. Het verzadigingsniveau is 5

d. We moeten dan oplossen de vergelijking: $x = 2x - 0{,}2x^2$

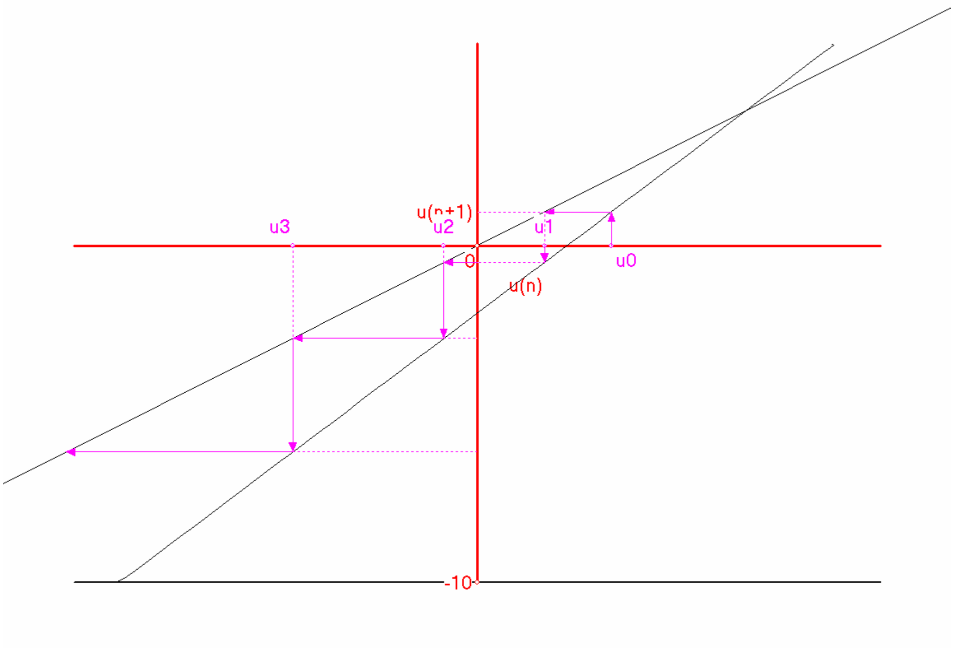
27.

a.



Geen convergentie

b.



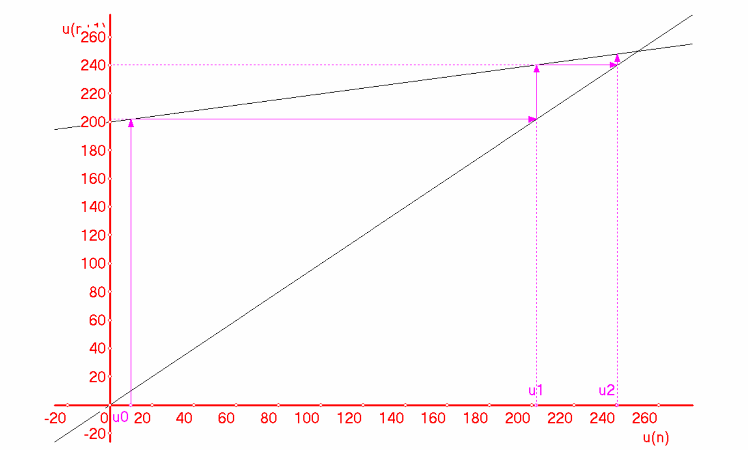
Geen convergentie

c. Hier is de webgrafiek gelijk aan het snijpunt van $y = x$ en $y = 1{,}5x - 2$ de evenwichtswaarde $\Rightarrow V = 4$

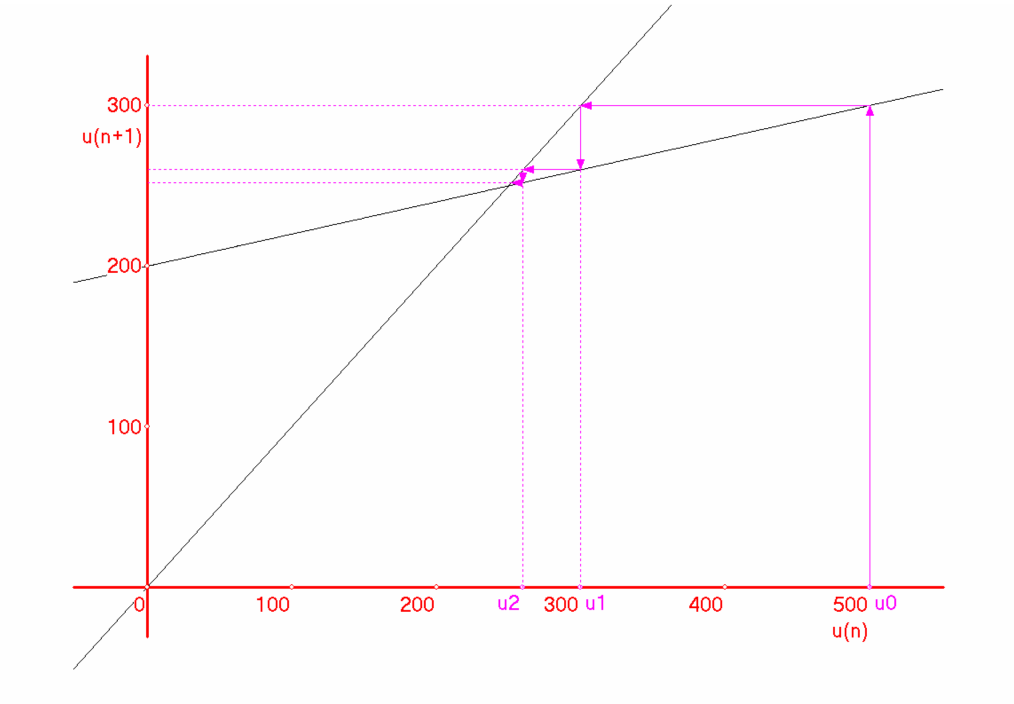
d.

Er is hier convergentie met

$$V = \bar{u} = \frac{200}{1 - 0{,}2} = 250$$

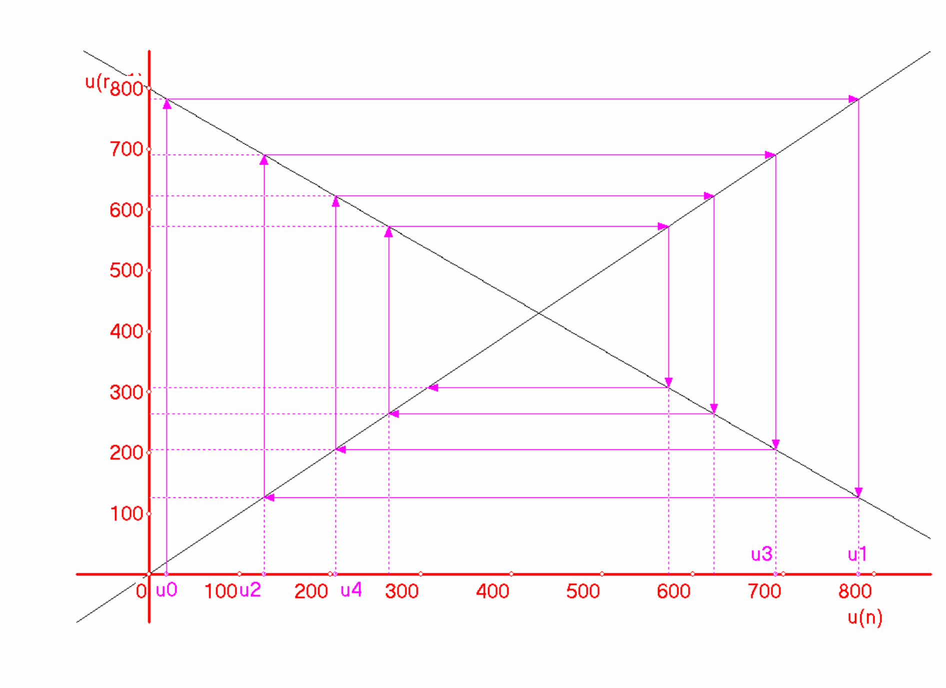


e.



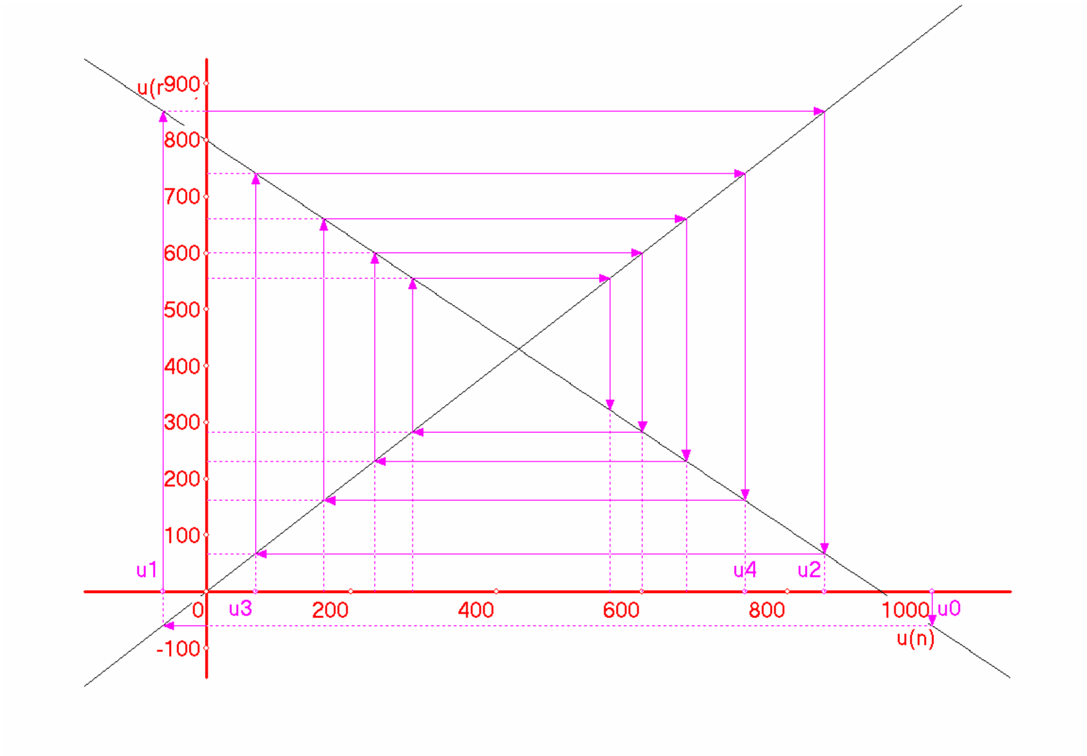
Er is hier convergentie met $V = \overline{u} = \dfrac{200}{1-0,2} = 250$

f.



Er is hier convergentie met $V = \overline{u} = \dfrac{800}{1+0,86} \approx 430,1$

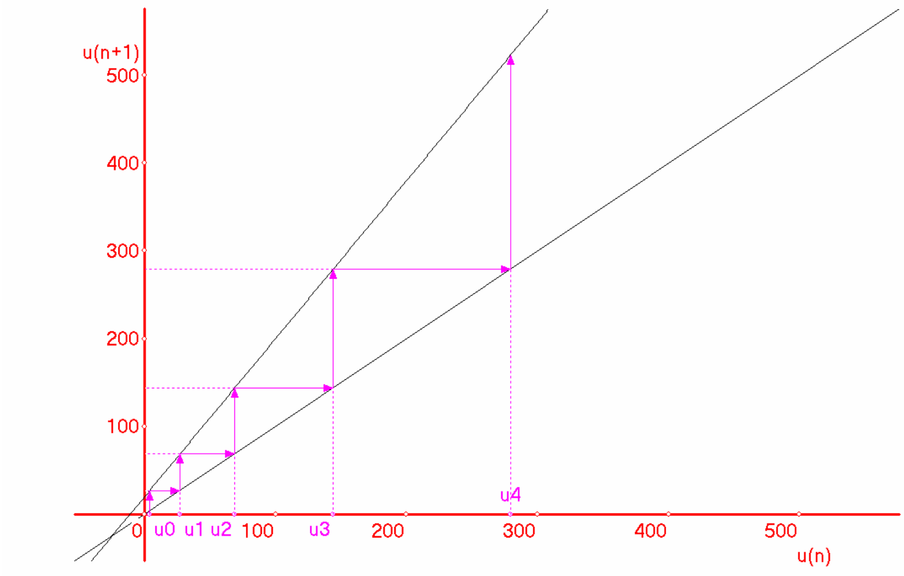
g.



Er is hier convergentie met $V = \bar{u} = \dfrac{800}{1+0,86} \approx 430,1$

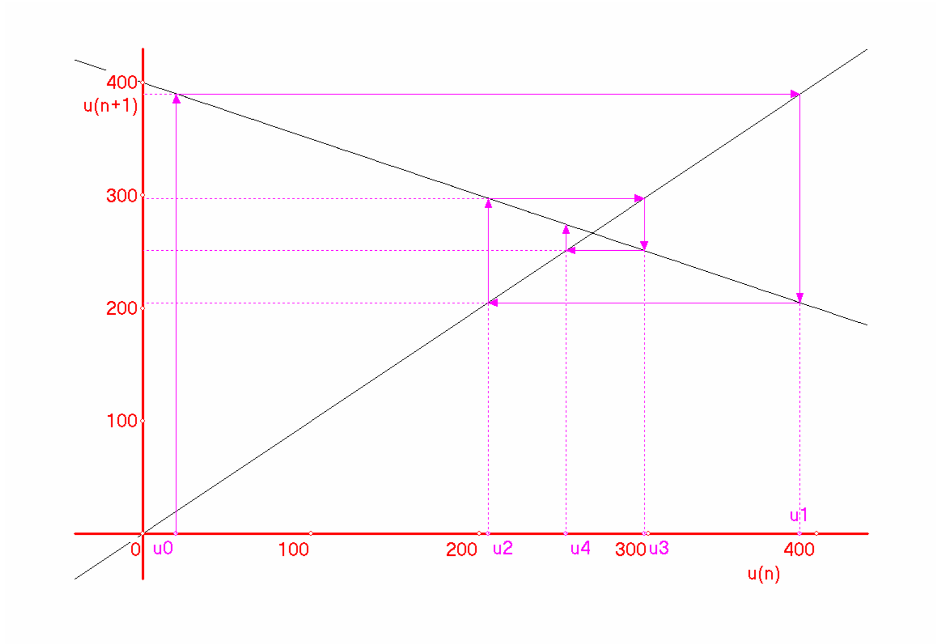
28.

a. $u_n = 1{,}8u_{n-1} + 20$



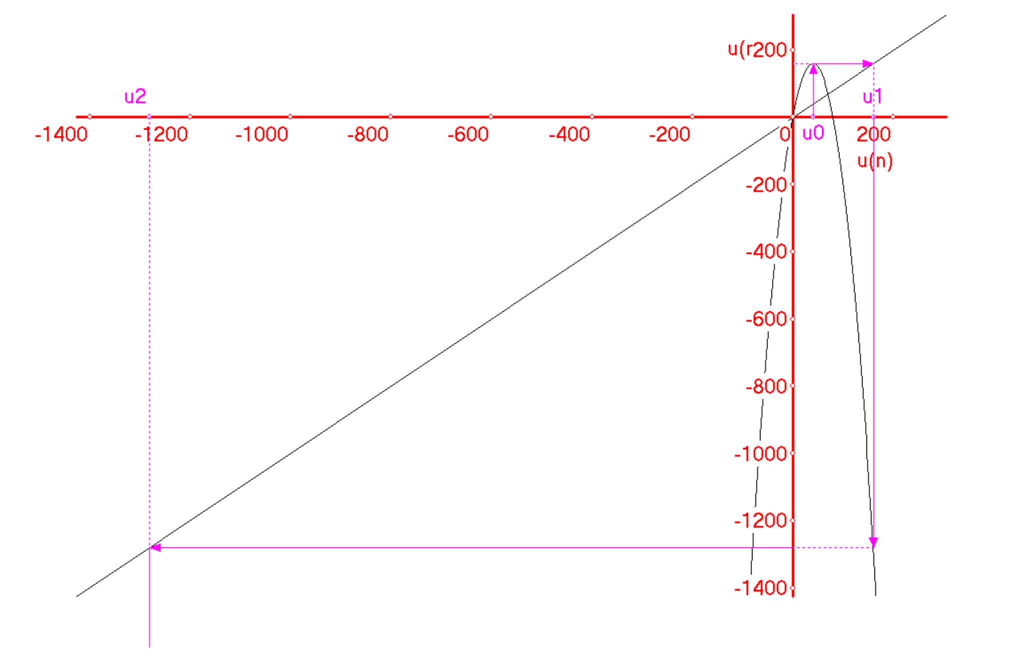
Het gaat uit elkaar $\Rightarrow$ instabiel evenwichtsp*u*nt.

b.



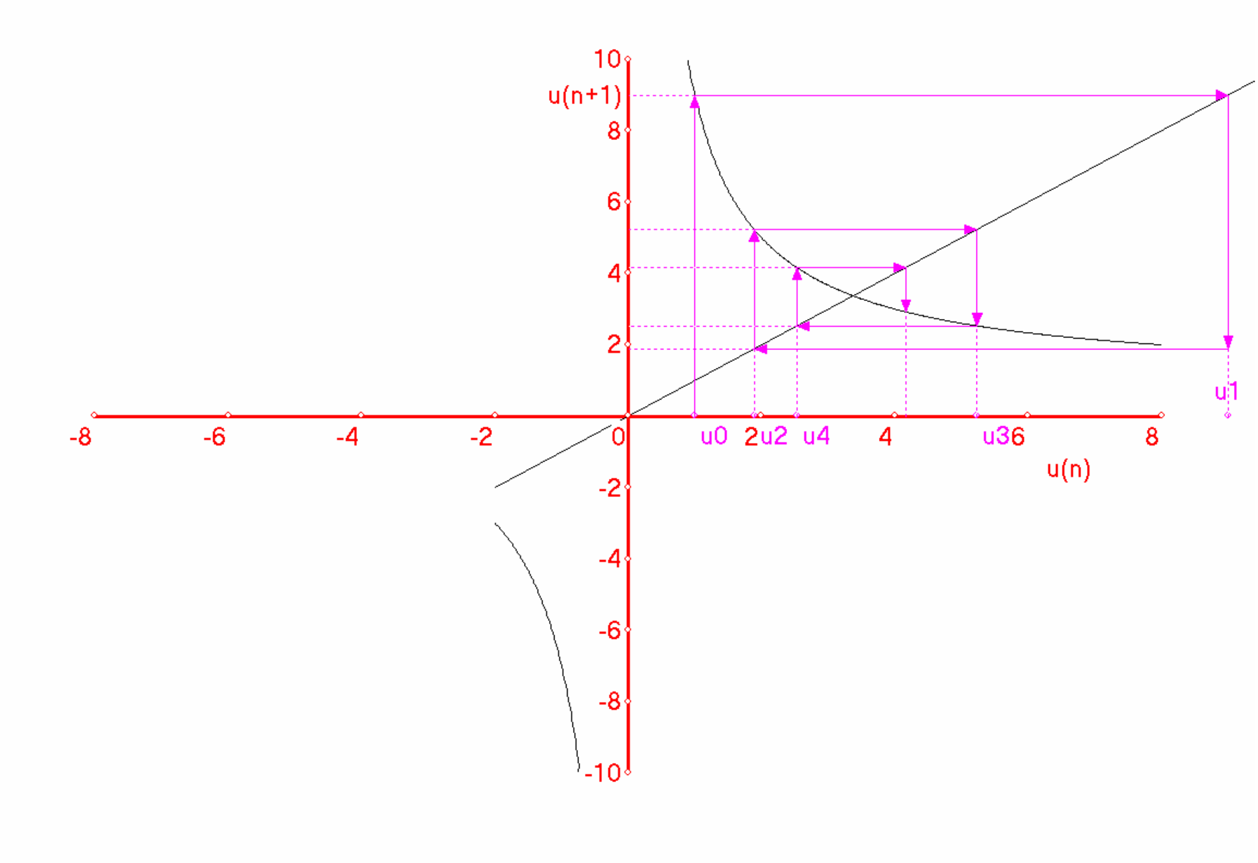
De punten gaan naar elkaar ⇒ stabiel evenwichtsp*u*nt.

c. $u_n = -0{,}1u^2_{n-1} + 8u_{n-1}$



De punten gaan weer uit elkaar ⇒ instabiel evenwichtsp*u*nt .

d. $u_n = 1 + \dfrac{8}{u_{n-1}}$

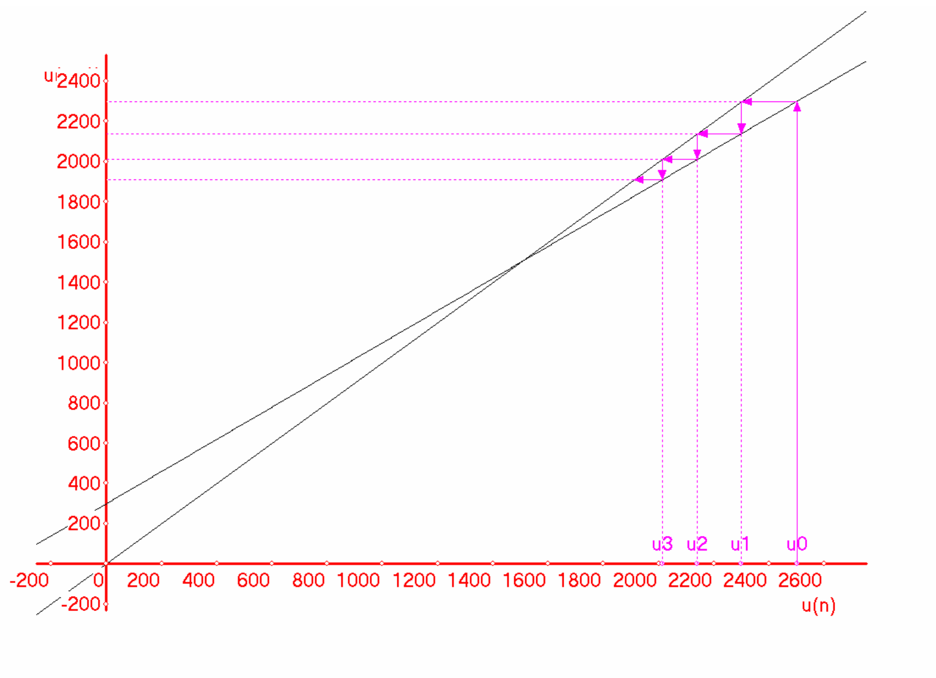


De punten gaan weer naar elkaar $\Rightarrow$ stabiel evenwichtspunt .

29.

a. 20% gaat weg $\Rightarrow$ 80% blijft over en ieder jaar 300 nie*u*we bomen $\Rightarrow$
$A_n = 0{,}8A_{n-1} + 300$ met $A_0 = 2500$

b.



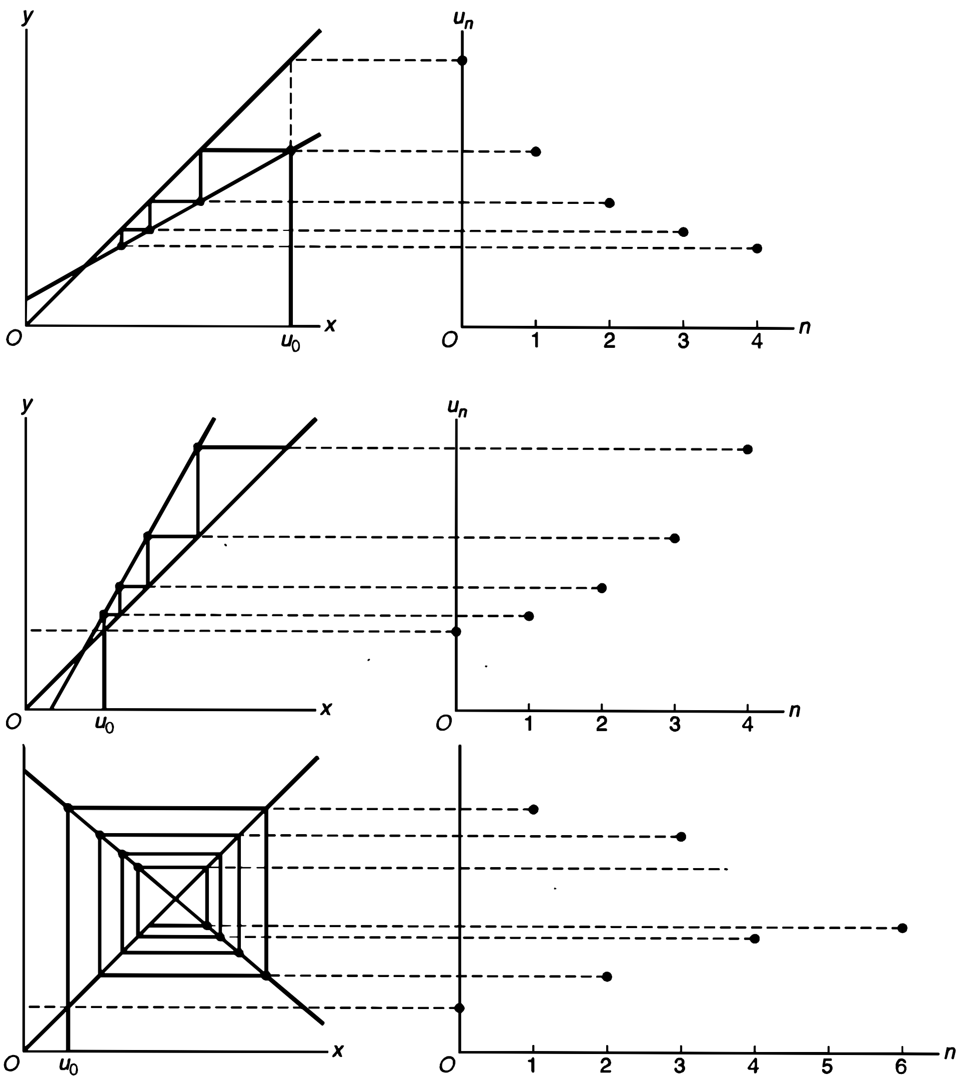
De rij A_n convergeert .

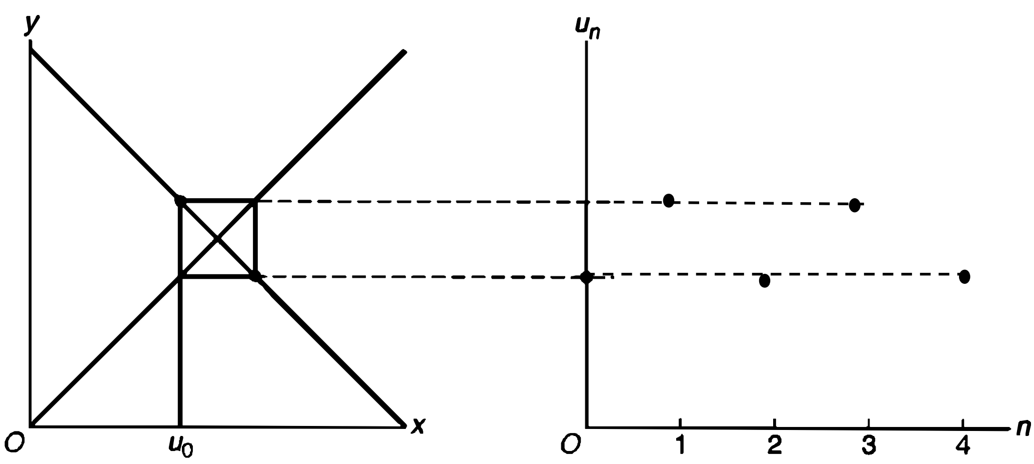
c. Nu moeten we dus het evenwichtspunt berekenen $\Rightarrow V = \overline{u} = \dfrac{300}{1-08} = 1500 \Rightarrow$ op den duur staan er 1500 bomen.

30

a. In de webgrafiek lees je bij iedere n de waarde van u_n af en bij de tijdgrafiek doe je dat ook.

b.





31 $u_n = au_{n-1} + b$ met $u_0 = 5$

a. $a = 1$ en $b = 3$ $\Rightarrow u_n = u_{n-1} + 3$ met $u_0 = 5$ $\Rightarrow u_1 = 5+3=8$ en $u_2 = 11$; $u_3 = 14$ en $u_4 = 17$
Dit is een RR.

b. Nu : $u_n = 3u_{n-1}$ met $u_0 = 5$ $\Rightarrow u_1 = 3.5+3= 15$ en $u_2 = 45$; $u_3 = 135$ en $u_4 = 405$ Dit is een MR.

c. $S_3 = 5 + 15 + 45 + 135 = 200$

32.

a. $u_n = 1{,}05 \,.\, u_{n-1} + 500$ met $u_0 = 750$

b. $u_3 = 1{,}05.u_2 + 500 = 1{,}05(1{,}05^2 \,.\, 750 + 1{,}05 \,.\, 500 + 500) + 500 =$
$1{,}05^3 \,.\, 750 + 1{,}05^2 \,.\, 500 + 1{,}05 \,.\, 500 + 500$

c. $u_6 = 1{,}05^6 \,.\, 750 + 1{,}05^5 \,.\, 500 + 1{,}05^4 \,.\, 500 + 1{,}05^3 \,.\, 500 + 1{,}05^2 \,.\, 500 + 1{,}05 \,.\, 500 + 500$

d. $a = 1{,}05$ en de beginterm is 500

33.

a. $u_n = 1{,}5.u_{n-1} - 5$ met $u_0 = 30$ $\Rightarrow$ opl. formule : $u_n = \bar{u} + a^n(u_0 - \bar{u})$ met $\bar{u} = \dfrac{b}{1-a} = \dfrac{-5}{1-1{,}5} = 10$

$\Rightarrow u_n = 10 + 1{,}5^n.(30 - 10) = 10 + 20 \,.\, 1{,}5^n$

b. $x_n = 0{,}75.x_{n-1} + 20$ met $x_0 = 100$ $\Rightarrow \bar{x} = \dfrac{b}{1-a} = \dfrac{20}{1-0{,}75} = 80$
$x_n = 80 + 0{,}75^n \,.\, (100 - 80) = 80 + 20 \,.\, 0{,}75^n$

c. $K_n = 1{,}05.K_{n-1} - 200$ met $K_0 = 1000$ $\Rightarrow \bar{K} = \dfrac{b}{1-a} = \dfrac{-200}{1-1{,}05} = 4000 \Rightarrow$
$K_n = 4000 + 1{,}05^n \,.\, (1000 - 4000) = 4000 - 3000 \,.\, 1{,}05^n$

34.

a. $K_n = 1{,}04.K_{n-1} - 150$ met $K_0 = 800$

b. $\bar{K} = \dfrac{b}{1-a} = \dfrac{-150}{1-1{,}04} = 3750 \Rightarrow K_n = 3750 + 1{,}04^n \,.\, (800 - 3750) = 3750 - 2950 \,.\, 1{,}04^n$

c. Bereken het tijdstip dat het kapitaal ongeveer 0 is. $\Rightarrow K_n = 0 \Leftrightarrow$
$2950 \,.\, 1{,}04^n = 3750 \Leftrightarrow 1{,}04^n \approx 1{,}27\ldots \Leftrightarrow n = {}^{1,04}\log(1{,}271\ldots) = \dfrac{\log(1{,}27\ldots)}{\log(1{,}04)} \approx 6{,}1$
Nu geldt: $K_6 \approx 17{,}31$ en dan is het 1-1-2006 en K7 $\approx$ - 132 en dan is het 1-1-2007
Op 1 -1 -2007 kan ze dus niet meer 150 euro van de bank halen. Ze kan dan nog wel 18 euro opnemen.

35.

a. $A_n = 0{,}75.A_{n-1} + 50$ met $A_0 = 100$

b. $\overline{A} = \dfrac{b}{1-a} = \dfrac{50}{1-0{,}75} = 200 \Rightarrow A_n = 200 + 0{,}75^n .(100 - 200) = 200 - 100 \,.\, 0{,}75^n$

c. Na 32 uur $\Rightarrow n = 8 \Rightarrow A_8 = 200 - 100.0{,}75^8 \approx 190$ mg

d. Als n heel groot is , dan $0{,}75^n \to 0 \Rightarrow -100 \,.\, 0{,}75^n \to 0 \Rightarrow A_n \to 200 \Rightarrow$
de evenwichtswaarde is dus 200 mg.

36.

a. $P_n = 0{,}96 \,.\, P_{n-1} - 600$ met $P_0 = 85000$

b. $\overline{P} = \dfrac{b}{1-a} = \dfrac{-600}{1-0{,}96} = -15000 \Rightarrow P_n = -15000 + 0{,}96^n \,.\, (85000 - (-15000))$
$\Leftrightarrow P_n = -15000 + 100000.0{,}96^n$

c. 1-1-2006 $\Rightarrow n = 7 \Rightarrow P_7 = -15000 + 100000.0{,}96^7 \approx 60145$ inwoners

d. Vergelijking $P_n = 30000 \Leftrightarrow 100000.0{,}96^n = 45000 \Leftrightarrow 0{,}96^n = 0{,}45 \Leftrightarrow$
$n = {}^{0,96}\log(0{,}45) = \dfrac{\log(0{,}45)}{\log(0{,}96)} \approx 19{,}6 \Rightarrow$ op 1 jan*u*ari 2019

e. Als n heel groot wordt dan $0{,}96^n \to 0 \Rightarrow 100000.0{,}96^n \to 0 \Rightarrow P_n \to -15000$ Dit kan in de praktijk niet dus op den duur zal de stad gaan uitsterven bij dit proces.

37.

a.

7.00 uur	10000 mensen
7.30 uur	10000 + (0,4.(40000 – 10000) = 22000 mensen
8.00 uur	22000 + 0,4.(40000 – 22000) = 29200 mensen

b. $P_n = P_{n-1} + 0{,}40.(40000 - P_{n-1}) = 0{,}6.P_{n-1} + 16000$ met $P_0 = 10000$

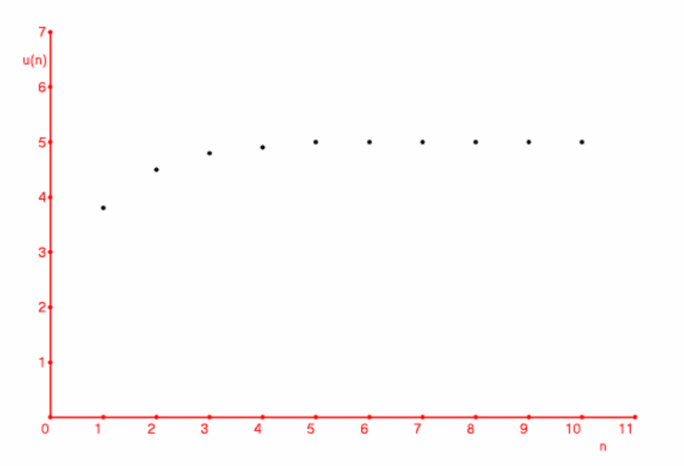
c. $\overline{P} = \dfrac{b}{1-a} = \dfrac{1600}{1-0{,}60} = 40000 \Rightarrow P_n = 40000 + 0{,}6^n.(10000 - 40000) = 40000 - 30000 \,.\, 0{,}6^n$

d. Vergelijking: $P_n = 39000 \Leftrightarrow 40000 - 30000 \,.\, 0{,}6^n = 39000 \Leftrightarrow 30000 \,.\, 0{,}6^n = 10000 \Leftrightarrow$
$0{,}6^n = 1/30 \Leftrightarrow {}^{0,6}\log(1/30) = \dfrac{\log(1/30)}{\log(0{,}6)} \approx 6{,}7 \Rightarrow$ voor $n = 7$ is P_n voor het eerst meer dan 39000.

38. $u_n = 0{,}4u_{n-1} + 3$

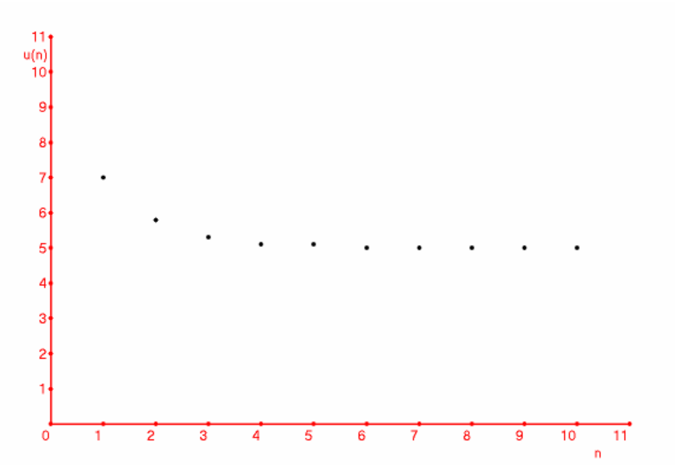
a. $u_0 = 2$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2	3,8	4,5	4,8	4,9	5,0	5,0	5,0	5,0



b. $u_0 = 10$

u	u_n
0	10
1	7
2	5,8
3	5,3
4	5,1
5	5,1
6	5
7	5
8	5



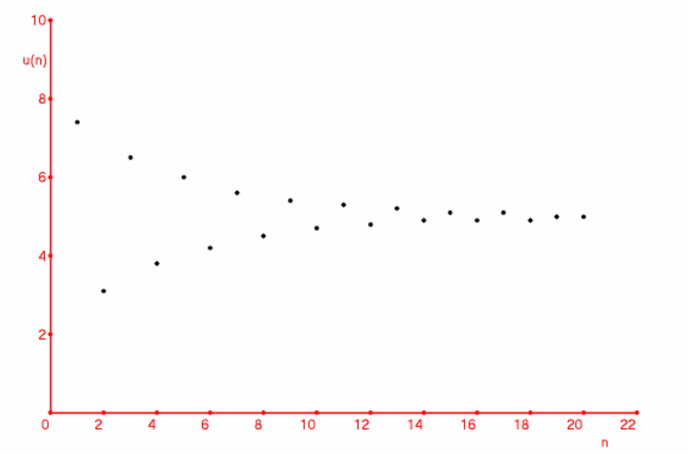
c. Bij onderdeel a hebben we een stijgende grafiek en bij onderdeel b een dalende grafiek. Bij beide grafieken hebben we de evenwichtswaarde 5.

d. Bij vraag a is de opl. formule :$u_n = 5 + 0{,}4^n.(2 - 5) = 5 - 3 \ . \ 0{,}4^n$
Dit is een stijgende grafiek met H.A. met hoogte 5.

Bij vraag b is de opl. formule : $u_n = 5 + 0{,}4^n.(10 - 5) = 5 + 5 \ . \ 0{,}4^n$
Dit is een dalende grafiek met H.A. ook op hoogte 5.

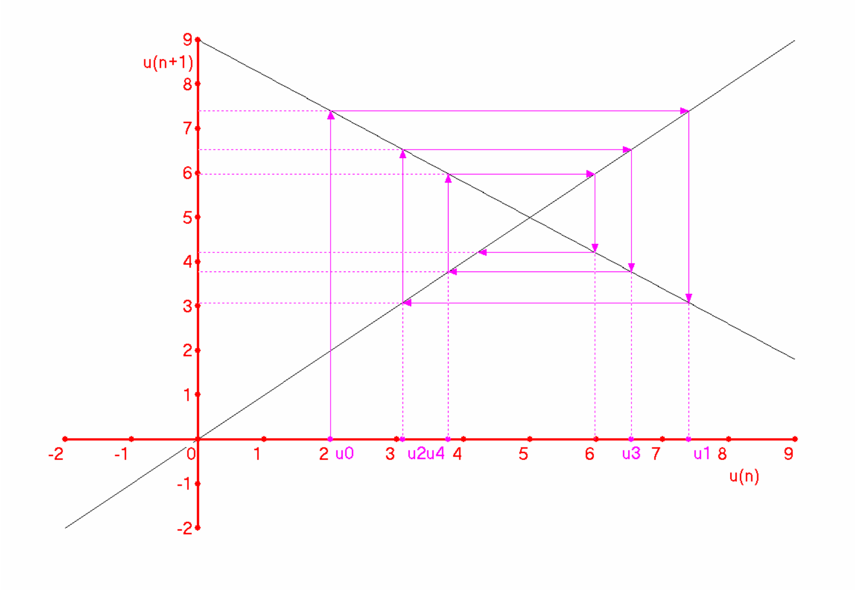
39. $u_n = -u_{n-1} + 6$

a.



b. De punten benaderen afwisselend van bovenkant en van de onderkant de hoogte 5.
De afstand tot 5 wordt wel steeds minder.

c.



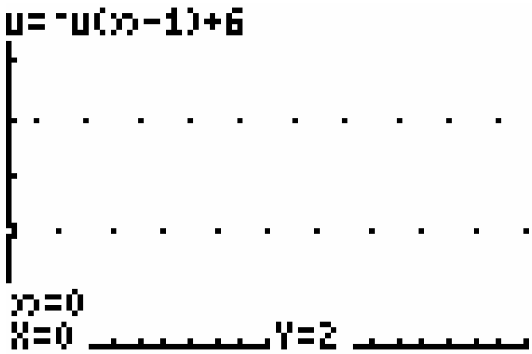
De punten op de gegeven lijn liggen steeds aan weerskanten van het evenwichtspunt en de afstand tot het evenwichtspunt wordt steeds minder.

d. $\bar{u} = \frac{b}{1-a} = \frac{9}{1+0,8} = 5 \Rightarrow u_n = 5 + (-0,8)^n .(2 - 5) = 5 - 3 . (-0,8)^n$

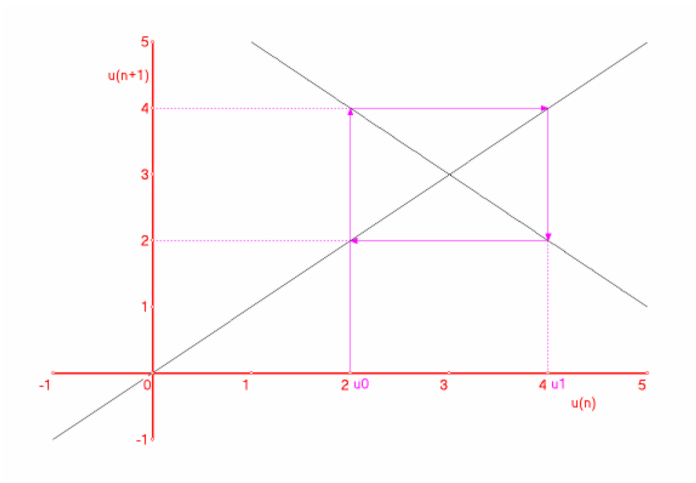
Voor n is even dan is $u_n < 5$ en voor n is oneven dan $u_n > 5$. $\Rightarrow$ steeds aan weerskanten van de waarde 5.

40.

a. De punten hebben wisselend de hoogte 2 en 4.



b. De webgradiek blijft steeds hetzelfde in een rechthoesvorm.



c. $\bar{u} = \dfrac{b}{1-a} = \dfrac{6}{1+1} = 3 \Rightarrow u_n = 3 + (-1)^n.(2-3) = 3 - (-1)^n$

Nu zien we dus dat voor n is even geldt : $u_n = 2$ en voor n is eneven geldt dat $u_n = 4$

41. $u_n = au_{n-1} + b$

Bij figuur 1 hoort a = 0,5 naar een evenwichtswaarde.
Bij figuur 2 hoort a = -0,5 wisselend naar een evenwichtswaarde.
Bij figuur 3 hoort a = -1 afwisselend steeds dezelfde waarden.
Bij figuur 4 hoort a = 1,5 niet begrensd.
Bij figuur 5 hoort a = 0,5 weer begrensd
Bij figuur 6 hoort a = 1 ook hier niet begrensd en lineaire afname
Bij figuur 7 hoort a = -1,5 wisselend steeds verder uit elkaar.
Bij figuur 8 hoort a = 1,5 niet begrensd

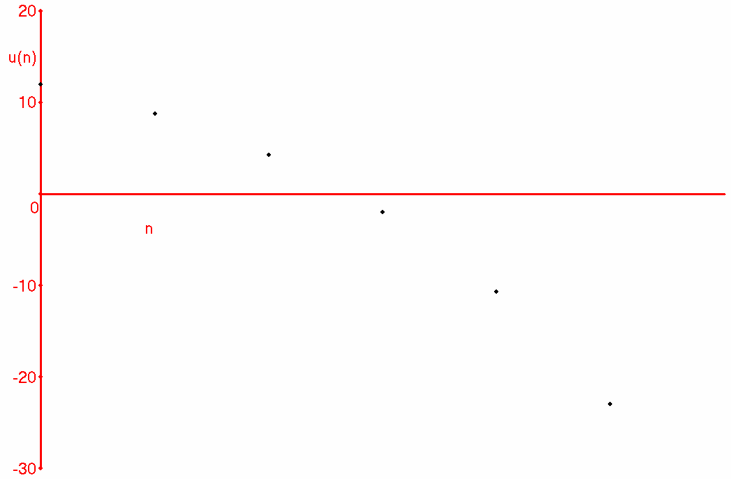
42.

a. $u_n = 1{,}4u_{n-1} - 8$ met $u_0 = 12$

$a = 1{,}4 > 1$ monotone rij en divergentie

$\bar{u} = \dfrac{b}{1-a} = \dfrac{-8}{1-1{,}4} = 20 \Rightarrow$

$u_0 = 12 < \bar{u}$

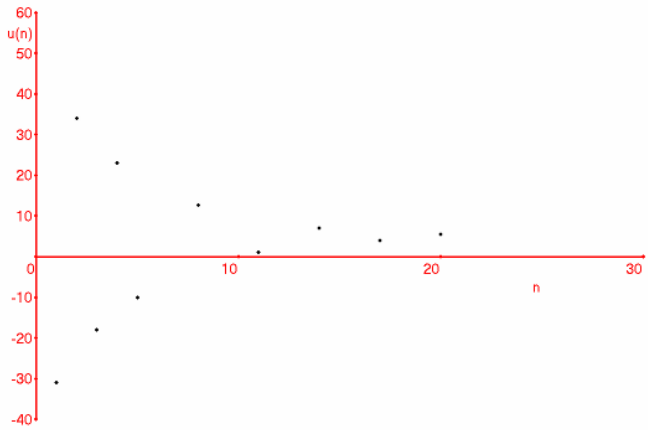


b. $u_n = -0{,}8u_{n-1} + 9$ met $u_0 = 50$

$a = -0{,}8$ en $-1 < a < 1 \Rightarrow$ alternerende rij en convergent.

$\bar{u} = \dfrac{b}{1-a} = \dfrac{9}{1+0{,}8} = 5 \Rightarrow u_0 > \bar{u}$

n	u_n
0	50
1	-31
2	33,8
5	-9,7
8	12,6
11	1,1
14	7,0

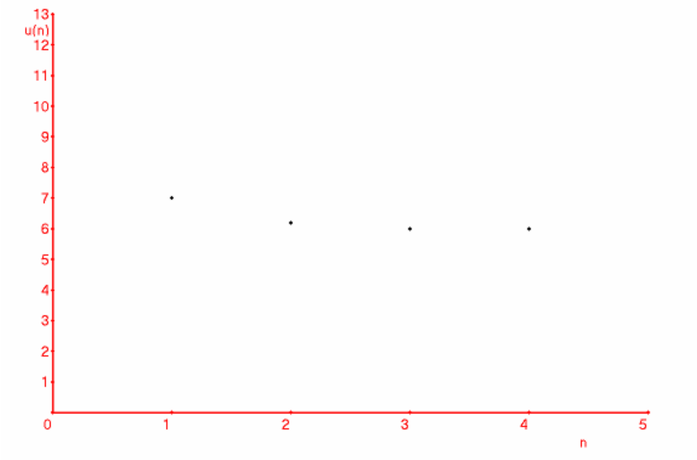


c. $u_n = 0{,}2u_{n-1} + 4{,}8$ met $u_0 = 11$

$a = 0{,}2 \Rightarrow$ monotoon en convergent

$$\overline{u} = \frac{b}{1-a} = \frac{4{,}8}{1-0{,}2} = 6 \Rightarrow u_0 = 11 > \overline{u}$$

n	u_n
0	11
1	7
2	6,2
3	6,0
4	6,0

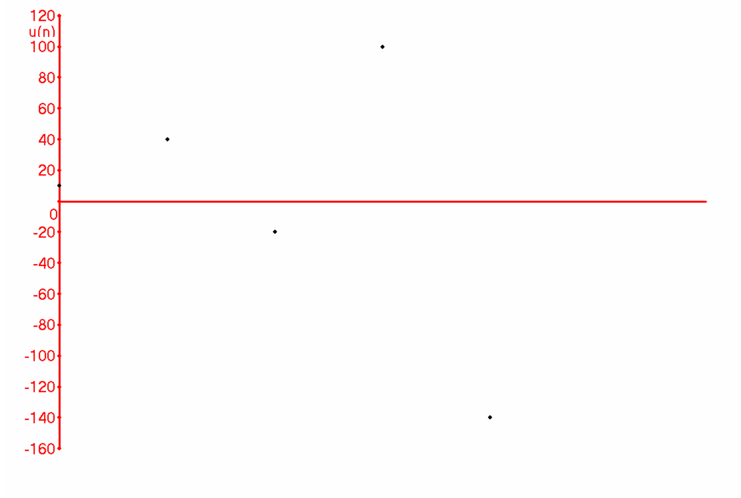


d. $u_n = -2u_{n-1} + 60$ met $u_0 = 10$

$a = -2 \Rightarrow$ de rij is alternerend en divergent

$$\overline{u} = \frac{b}{1-a} = \frac{60}{1+2} = 20 \Rightarrow u_0 = 10 < \overline{u}$$

n	u_n
0	10
1	40
2	-20
3	100
4	-140



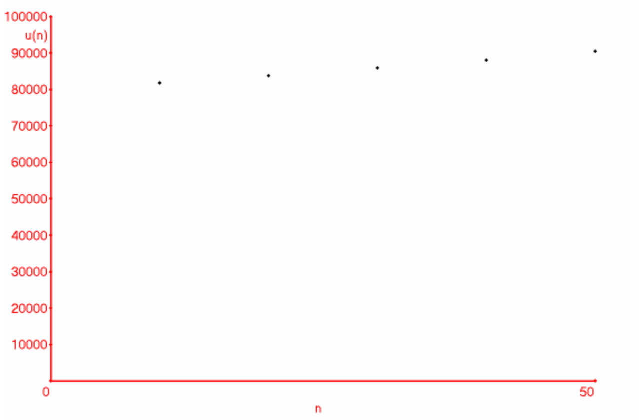
43.

a. $B_n = 1{,}006.B_{n-1} - 300$ met B_0 is het bedrag dat ze leent.

b. $a = 1{,}006 \Rightarrow$ divergente rij en $\overline{B} = \frac{b}{1-a} = \frac{-300}{1-1{,}006} = 50000$

1) $B_0 > \overline{B}$

$B_0 = 80000$

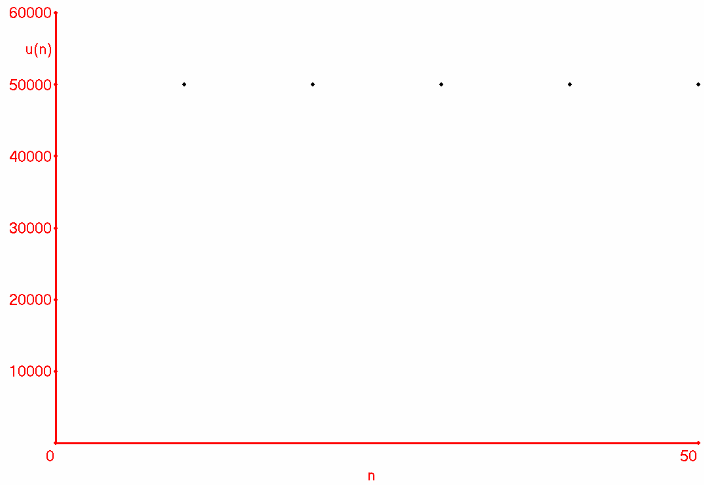


De rij is dus stijgend en heeft een steeds grotere afstand tot de evenwichtswaarde 50000.

2) $B_0 < \overline{B}$
$B_0 = 40000$
Het is nu een dalende rij waarbij de afstand tot de evenwichtswaarde 50000 steeds groter wordt.

3) $B_0 = \overline{B} = 50000$

Nu hebben we te maken met een constante rij met een waarde 50000



c. $\overline{B} = 50000$ Als $B_0 > \overline{B}$ dan neemt de schuld toe (zie de 1e figuur)
Als $B_0 < \overline{B}$ dan neemt haar schuld af (zie 2e figuur)
Als B0 = $\overline{B}$ dan blijft haar schuld steeds gelijk.
Hieruit volgt dus dat het te lenen bedrag minder dan $B_0 = \overline{B} = 50000$ euro moet zijn.

44. De diff. vergelijking is : $K_n = 1{,}005.K_{n-1} - 200$ met $\overline{K} = \dfrac{-200}{1-1{,}005} = 40000$

We moeten er in ieder geval voor zorgen dat de grafiek minstens stijgend is. $\Rightarrow$
$K_0 > \overline{K}$ Het model van de bijbehorende grafiek wordt dan:

$\Rightarrow$ We moeten dus een kapitaal kiezen van meer dan 40000 euro

45. 5000 vissen ; groei van 10% per jaar.

a. De groeifactor is 1,1 $\Rightarrow$ $P_t = 5000.1,1^t$

b. Dit is een exponentiële groei. $5000.1,1^t = 15000 \Leftrightarrow 1,1^t = 3 \Leftrightarrow t = {}^{1,1}\log 3 = \dfrac{\log(3)}{\log(1,1)} \approx 11,5 \Rightarrow$

Na ongeveer 11,5 jaar zijn er dus meer dan 15000 vissen.

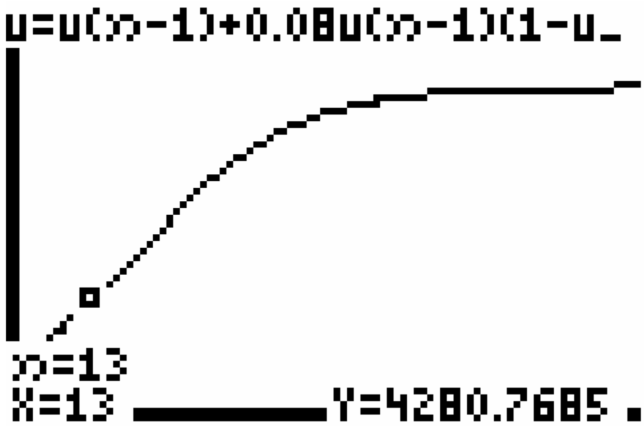
c. Ruimtegebrek en de hoeveelheid voedsel wordt minder.

d. Ja, je mag verwachten dat als de populatie groter wordt dan zal de groei afgeremd worden.

46. $P_t = P_{t-1} + 0,08.P_{t-1}.(1 - \dfrac{P_{t-1}}{12000})$ met $P_0 = 2000$

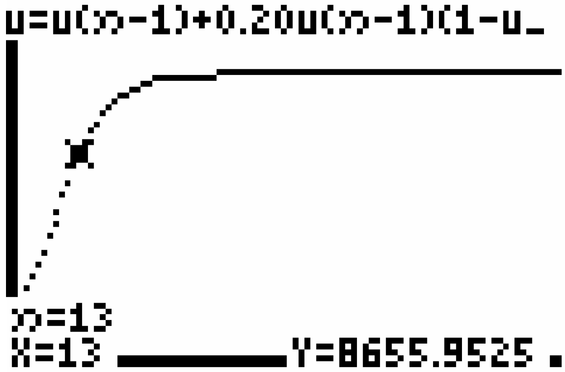
a. De grenswaarde is hier 12000

b. Voer de d.v . in met n(Min) = 0 en u(nMin) = 2000
met trace of eventueel de tabel vinden we :
$P_{13} \approx 4281$ en $P_{20} \approx 5901$

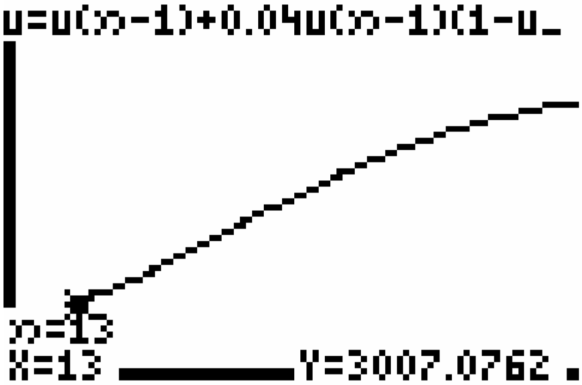


c. In de tabel zien we dat $P_{49} \approx 10938$ en $P_{50} \approx 11015$ $\Rightarrow$ vanaf $t = 50$ is die afstand minder dan 1000.

d. Nu is : $P_{13} \approx 8656$ en $P_{20} \approx 11050$
Nu weer naar de tabel $\Rightarrow$
$P_{19} \approx 10840$ en $P_{20} \approx 11050$ $\Rightarrow$
Nu geldt het gevraagde voor $t \geq 20$



e. Bij deze verandering zien we dat de grafiek nu langzamer remt. In de tabel zien we :
$P_{99} \approx 10966$ en $P_{100} \approx 11004$ $\Rightarrow$
Nu geldt het gevraagde pas voor $t \geq 100$



47. $P_t = P_{t-1} + 0,3.P_{t-1}.\left(1 - \frac{P_{t-1}}{2000}\right)$ met $P_0 = 2$

a. De formule weer invoeren en kijken naar de tabel $\Rightarrow P_{43} \approx 1994,5$ en $P_{44} \approx 1996,1 \Rightarrow$ vanaf $t = 44$ geldt het gevraagde.

b. $P_t = P_{t-1} + 0,3.P_{t-1}.\left(1 - \frac{P_{t-1}}{50}\right)$ met $P_0 = 2000$

c. $P_t = P_{t-1} + 0,2.P_{t-1}.\left(1 - \frac{P_{t-1}}{50}\right)$ met $P_0 = 2000$ Hier is de groeivoet van 0,3 naar 0,2 gegaan.

48. Stel de log. groei formule is : $P_t = P_{t-1} + k.P_{t-1}.\left(1 - \frac{P_{t-1}}{25}\right)$ met $P_0 = 2$ Hierin is het begin gelijk aan 2 en de grens is 25. Met proberen vinden we $k \approx 0,25$.

49.

a. De grenswaarde is 1035 en $P_0 = 14 \Rightarrow P_t = P_{t-1} + k.P_{t-1}.\left(1 - \frac{P_{t-1}}{1035}\right)$ met $P_0 = 14$ Nu weer met proberen vinden we een groeivoet van 0,18 $\Rightarrow P_t = P_{t-1} + 0,18.P_{t-1}.\left(1 - \frac{P_{t-1}}{1035}\right)$ met $P_0 = 14$

b. We komen ongeveer op het zelfde uit. $\Rightarrow$ geen afwijking.

50.

a. Grenswaarde 2000 en startwaarde 150 en groeivoet 0,5 per maand $\Rightarrow$ de form*u*le wordt:
$P_t = P_{t-1} + 0,5.P_{t-1}.\left(1 - \frac{P_{t-1}}{2000}\right)$ met $P_0 = 150$

b. Bekijk de tabel $\Rightarrow P_9 \approx 1727$ en $P_{10} \approx 1845$ $\Rightarrow$ vanaf $t = 10$ geldt het gevraagde.

c. $P_{13} \approx 1978$ en $P_{14} \approx 1989$ $\Rightarrow$ vanaf $t = 14$ geldt het gevraagde.

d. Nu wordt de formule : $P_t = P_{t-1} + 0,5.P_{t-1}.\left(1 - \frac{P_{t-1}}{5000}\right)$ met $P_0 = 150$
$P_{16} \approx 4965$ en $P_{17} \approx 4982 \Rightarrow$ Vanaf $t = 17$ geldt het gevraagde.

51. 20000 inwoners ; op 1 maart 1500 inwoners ; groeivoet is 0,4 per dag ; grens op 80%

a. $N_t = N_{t-1} + 0,4.N_{t-1}.\left(1 - \frac{N_{t-1}}{16000}\right)$ met $N_0 = 1500$

b. 5 maart $\Rightarrow t = 4 \Rightarrow$ de tabel geeft dan ongeveer 4801 inwoners.

c. Kijken naar de tabel $\Rightarrow N_{12} \approx 14874$ en $N_{13} \approx 15293 \Rightarrow$ vanaf $t = 13$ dus vanaf 14 maart hebben voor het eerst meer dan 15000 inwoners het nieuws gehoort.

52. $P_t = P_{t-1} + 0,4.P_{t-1}.\left(1 - \frac{P_{t-1}}{20}\right)$ met $P_0 = 8$

a. $P_t = P_{t-1} + 0,4.P_{t-1}.\left(1 - \frac{P_{t-1}}{20}\right) = P_{t-1} + 0,4P_{t-1} - \frac{0,4}{20}.P^2{}_{t-1} = 1,4P_{t-1} - 0,02P^2{}_{t-1} \Rightarrow$

$a = 1,4$ en $b = 0,02$

b. d.v. van de eerste orde want alleen de termen P_{t-1} komen behalve P_t er in voor en niet P_{t-2}. Het is ook een kwadratische d.v. omdat de term $P^2{}_{t-1}$ er in voorkomt.

53. Gegeven $P_t = P_{t-1} + 0,4.P_{t-1}.\left(1 - \frac{P_{t-1}}{200}\right)$ met $P_0 = 50$

Neem $P_t = y$ en $P_{t-1} = x \Rightarrow y = x + 0,4x\left(1 - \frac{x}{200}\right) = x + 0,4x - \frac{0,4}{200}.x^2 = 1,4x - 0,002.x^2 \Rightarrow$

$y = -0,002x^2 + 1,4x$ en dit is de gevraagde vergelijking van de parabool.

54. Bij de gegeven d.v $P_t = P_{t-1} + 0,5.P_{t-1}.\left(1 - \frac{P_{t-1}}{20}\right)$ is de grenswaarde in de noemer van de breuk duidelijk te herkennen. $\Rightarrow$ grenswaarde is dus 20.

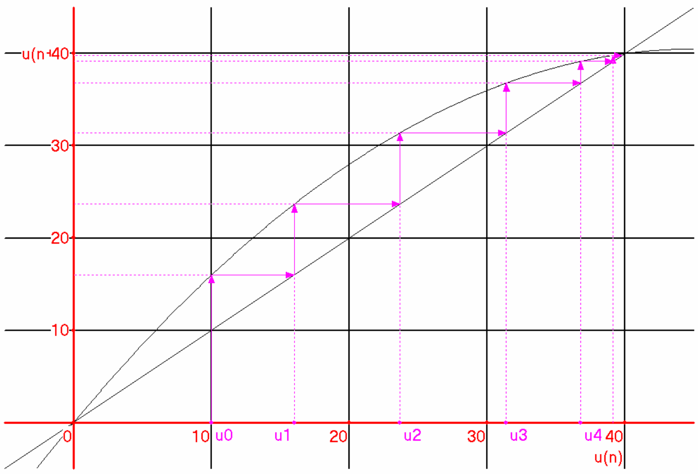
55. Gegeven de d.v $P_t = P_{t-1} + 0,8.P_{t-1}.\left(1 - \frac{P_{t-1}}{40}\right)$ met $P_0 = 10$

a. De formule van de parabool wordt :

$y = x + 0,8.x.\left(1 - \frac{x}{40}\right) = x + 0,8x - \frac{0,8}{40}x^2 = 1,8x - 0,02x^2$

b.

Zie de figuur



tabel:

x	y
0	0
10	16
20	28
30	36
40	40

c. Uit de d.v volgt direct dat de evenwichtswaarde gelijk is aan $\overline{P} = 40$

56.

a. Voor de evenwichtswaarde geldt de vergelijking :

$-0,004x^2+1,5x = x \Leftrightarrow -0,004x^2+0,5x = 0 \Leftrightarrow x(-0,004x+0,5) = 0 \Leftrightarrow$

$x = 0 \vee -0,004x = -0,5 \Leftrightarrow x = 0 \vee x = 0,5/0,004 = 125$

$x = 0$ voldoet niet $\Rightarrow \overline{P} = 125$

b. Uit de gegeven vergelijking volgt:

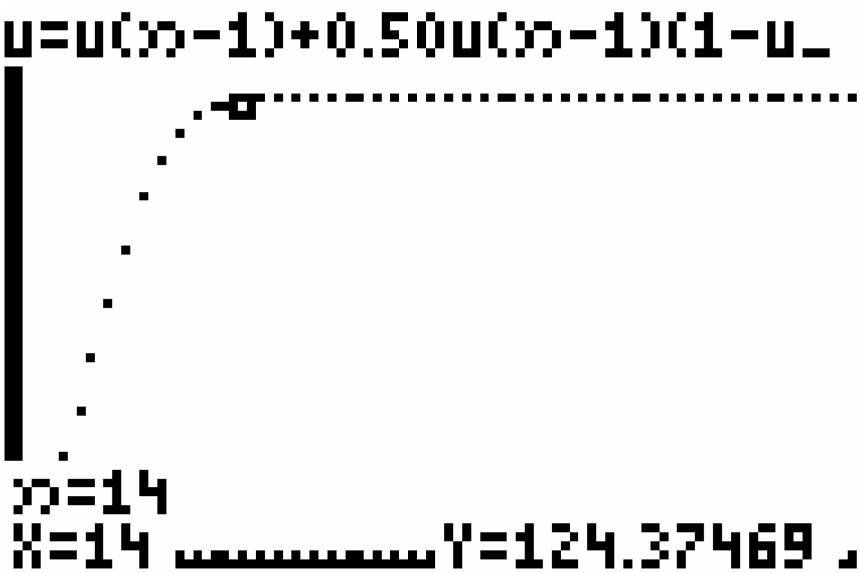
$y = -0,004x^2+1,5x \Rightarrow P_t = 1,5P_{t-1} - 0,004P_{t-1}^2 = P_{t-1} + 0,5P_{t-1} - 0,004P_{t-1}^2 \quad \Leftrightarrow$

$$P_t = P_{t-1} + 0,5P_{t-1} - 0,004P_{t-1}^2 = P_{t-1} + 0,5P_{t-1}(1-0,008P_{t-1}) = P_{t-1} + 0,5P_{t-1}\left(1-\frac{P_{t-1}}{125}\right) \text{ met } P_0 = 10$$

We moeten naar de vorm die staat op bladzijde 154 onderaan.

c. De groeivoet $k = 0,5$ en de grenswaarde G is hier 125.

d. $P_{13} \approx 123,8$ en
$P_{14} \approx 124,4$
$\Rightarrow$ vanaf $t = 14$ geldt dat de afstand tot G =125 minder is dan 1.



57. Op 1 maart 800 mensen met griep. ; groeivoet 0,2 bij logistische groei ; grens bij 12000 mensen.

a. $N_t = N_{t-1} + 0,2.N_{t-1}.\left(1-\frac{N_{t-1}}{12000}\right)$ met $N_0 = 800$

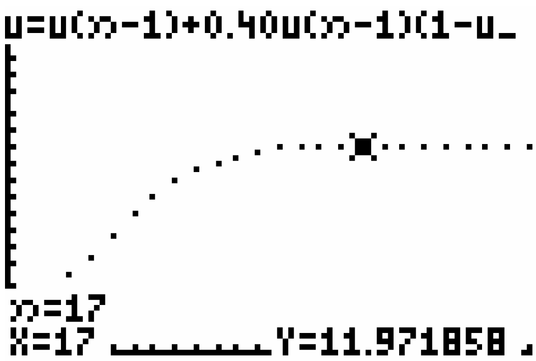
b. 29 maart $\Rightarrow t = 28 \Rightarrow N_{28} = 11427 \Rightarrow$ 11427 mensen hebben dan de griep gehad.

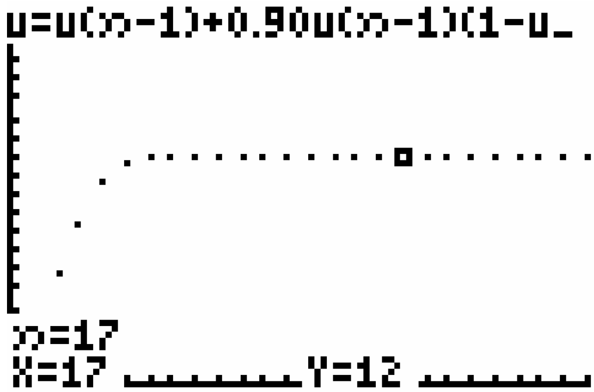
c. Meer dan 10000 mensen. Uit de tabel volgt : $N_{21} \approx 9757$ en $N_{22} \approx 10122 \Rightarrow$ op 23 maart hebben voor her eerst meer dan 10000 mensen de griep gehad.

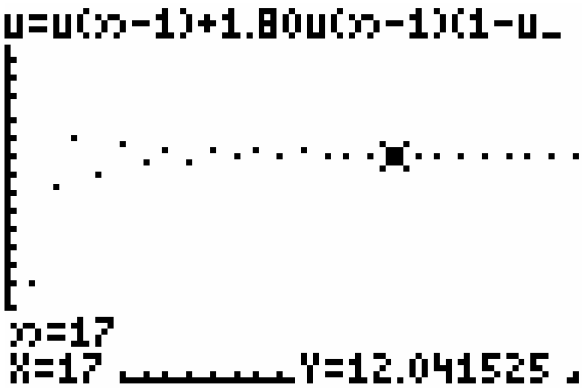
d. Uit de formule volgt nu: $y = x + 0,2x(1 - x/12000) = x + 0,2x - 0,2/1200 \,.\, x^2 =$
$1,2x - 0,000017x^2 \Rightarrow y = 1,2x - 0,000017x^2$

58. $P_t = P_{t-1} + k.P_{t-1}.\left(1-\dfrac{P_{t-1}}{12}\right)$ met $P_0 = 2$ nMa$x = 25$; Xma$x = 25$ en Yma$x = 20$

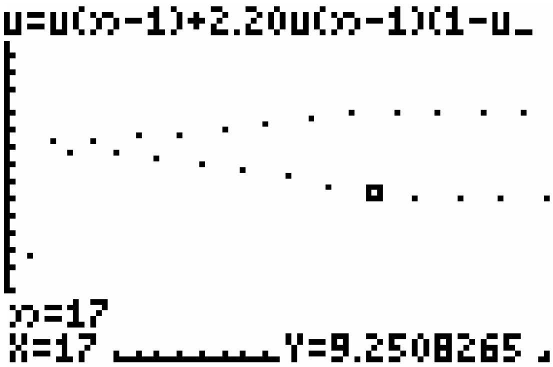
a. $k = 0{,}4$; $k = 0{,}9$ en $k = 1{,}8$

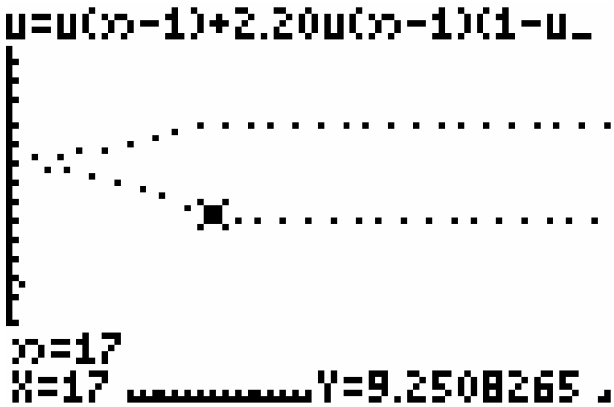




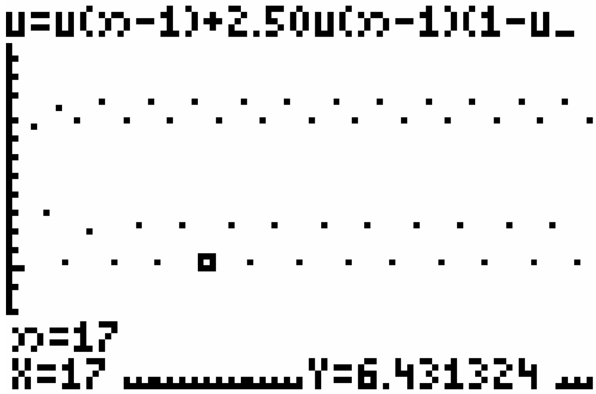


b. N*u* $k = 2{,}2$





c. $k = 2{,}5$



d. De grafieken worden steeds onoverzichtelijker. Het e*x*ponentiële st*u*k is niet meer te herkennen.
Bij $k = 3{,}5$ kan de GR het niet meer aan.